doi:10.3969/j.issn.1001-4616.2018.02.001

k-正则可图序列的公平划分问题

李海燕,郭　锦

(海南大学信息科学技术学院,海南 海口 570228)

[摘要]　设 $\pi=(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ 是非负整数序列,π_1,π_2 是将 π 的所有元素划分为两部分后的两个子序列. 如果 $-1\leqslant|\pi_1|-|\pi_2|\leqslant 1$,则称 π_1,π_2 是 π 的一个平衡二部划分,其中 $|\pi_i|(i=1,2)$ 表示 π_i 中的元素数目. 设 k 和 n 是两个正整数,$\pi=(k^n)$ 是 k-正则可图序列. 本文确定了 $\psi_{\max}(\pi)$ 的值和 $\psi_{\min}(\pi)$ 的值.

[关键词]　图,度序列,k-正则可图序列,平衡划分,公平划分

[中图分类号]O157.5　[文献标志码]A　[文章编号]1001-4616(2018)02-0001-07

k-Regular Graphic Degree Sequence Variant of Judicious Balanced Bipartition Problem of Graphs

Li Haiyan,Guo Jin

(College of Information Science and Technology,Hainan University,Haikou 570228,China)

Abstract:Let $\pi=(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ be a graphic sequence of nonnegative integers and π_1,π_2 be two sequences that are obtained by partitioning the elements of π into two sets. A balanced bipartition of π is a bipartition π_1,π_2 such that $-1\leqslant|\pi_1|-|\pi_2|\leqslant 1$,where $|\pi_i|(i=1,2)$ denote the number of elements of $|\pi_i|$. In this paper,let k and n be positive integers,we determine the values $\psi_{\max}(\pi)$ and $\psi_{\min}(\pi)$ of k-regular graphic sequence $\pi=(k^n)$.

Key words:graph,degree sequence,k-graphic sequence,balanced bipartition,judicious balanced bipartition

本文中只限于讨论有限简单图. 未给出的定义请参照文献[1]. 设 G 和 H 是简单图,图 $G+H$ 表示 G 与 H 的和,其顶点集为 $V(G+H)=V(G)\cup V(H)$,其边集为 $E(G+H)=E(G)\cup E(H)$.

设 V_1、V_2 是图 G 的一个二部划分,如果 $-1\leqslant|V_1|-|V_2|\leqslant 1$,则称 V_1、V_2 是 G 的一个二部平衡划分. 对于 $i=1,2$,$e(V_i)$ 表示两个端点都在 V_i 中的边的数目,$e(V_1,V_2)$ 表示两个端点分别在顶点子集 V_1、V_2 中的边数. 通常 $e(V_1,V_2)$ 用来表示平衡二部划分的大小. 图 G 的一个最大(最小)平衡二部划分 V_1、V_2 是图 G 的所有平衡二部划分中 $e(V_1,V_2)$ 的值达到最大(最小). 最大平衡二部划分问题和最小平衡二部划分问题都是 NP-完全的(见文献[2]). 近来,Jerrum 证明了平面图的最大平衡二部划分问题也是 NP-完全的,然而关于平面图的最小平衡二部划分问题的复杂性尚未得出结论(见文献[3]).

与最大、最小平衡划分问题不同,公平划分问题是寻找图 G 的一个划分,使得多个分量同时进行优化. 文献[4]中,Bollobás 和 Scott 提出下面猜想.

猜想 1(Bollobás 和 Scott[4])　每个 m 条边且最小度至少是 2 的图 G 存在一个平衡二部划分 V_1、V_2 使得

$$\max\{e(V_1),e(V_2)\}\leqslant\frac{m}{3}.$$

与最大割,最大平衡二部划分问题相关的公平划分问题已经被广泛研究(见文献[2-12]. Xu 和 Yu[12] 已经证明了猜想 1,同时指出 K_3 是唯一极图.

关于 k-正则图,Bollobás 和 Scott[7] 证明以下结论:

收稿日期:2018-01-16.

基金项目:海南省科协青年科技英才创新计划(QCXM201806).

通讯联系人:李海燕,博士,研究方向:图论. E-mail:lihaiyan@hainu.edu.cn

定理 1　(Bollobás 和 Scott[7])　设 $k\geqslant 1$ 是一个奇数且 G 是 m 条边的 k-正则图,则 G 存在一个平衡二部划分 V_1、V_2 使得

$$\max\{e(V_1),e(V_2)\}\leqslant\frac{k-1}{4k}m,$$

式中,极图是 sK_{k+1}.

定理 2(Bollobás 和 Scott[7])　设 $k\geqslant 2$ 是一个偶数且 G 是 m 条边的 k-正则图.

(1)如果 $|V(G)|$ 是偶数,则 G 存在平衡二部划分 V_1、V_2 使得

$$\max\{e(V_1),e(V_2)\}\leqslant\frac{k}{4(k+1)}m,$$

式中,极图是 $2tK_{k+1}$.

(2)如果 $|V(G)|$ 是奇数,则 G 存在平衡二部划分 V_1、V_2 使得

$$\max\{e(V_1),e(V_2)\}\leqslant\frac{1}{4}\ \frac{k}{(k+1)}m+\frac{k}{4},$$

式中,极图是 $(2t+1)K_{k+1}$.

本文我们将把图的公平划分问题变形到度序列的公平划分问题.

若简单图有顶点集 $v_1,v_2,\cdots,v_n$ 且 v_i 的度为 $d_i(i=1,\cdots,n)$,则序列 $\pi=(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ 称为 G 的度序列. 记 NS_n 为所有满足 $n-1\geqslant d_1\geqslant d_2\geqslant\cdots\geqslant d_n\geqslant 0$ 的整数序列的集合. 如果 π 是某个 n 阶简单图 G 的度序列,那么称 π 为可图序列,且 G 为 π 的一个实现. 记 GS_n 为 NS_n 中的所有可图序列组成的集合. 在可图度序列中,r^n 表示有 n 个 r,即度序列的实现中有 n 个顶点的度为 r.

给定可图序列 π,π_1、π_2 是将 π 的元素划分为两部分后的两个子序列. 如果 $-1\leqslant|\pi_1|-|\pi_2|\leqslant 1$,则称 π_1、π_2 是 π 的一个平衡二部划分,其中 $|\pi_i|(i=1,2)$ 表示 π_i 中的元素数目. 若 G 是 π 的一个实现,V_1、V_2 是 G 的一个平衡二部划分且 V_1、V_2 在 π 中的度序列分别为 π_1、π_2,则称 V_1、V_2 为 π 的平衡二部划分 π_1、π_2 的一个实现.

类似于图的“公平”划分问题,我们考虑度序列的“公平”划分问题:寻找已知可图序列 π 的一个平衡二部划分 π_1、π_2,使得 π_1、π_2 的某个实现 V_1、V_2 在 π 的所有平衡二部划分的所有实现下 $\min\{e(V_1),e(V_2)\}$ 达到最大或者 $\max\{e(V_1),e(V_2)\}$ 达到最小,记 $\psi_{\min}(\pi)=\min\{e(V_1),e(V_2)\}$,$\psi_{\max}(\pi)=\max\{e(V_1),e(V_2)\}$. 若 V_1'、V_2' 是 π 的某个平衡二部划分的一个实现,显然 $\psi_{\min}(\pi)\geqslant\min\{e(V_1'),e(V_2')\}$,$\psi_{\max}(\pi)\leqslant\max\{e(V_1'),e(V_2')\}$.

受图的公平划分问题启发,在可图序列中,以下问题也值得研究.

问题 1　给定可图序列 $\pi=(d_1,d_2,\cdots,d_n)$,$\psi_{\max}(\pi)$ 和 $\psi_{\min}(\pi)$ 的值是多少?

设 $\pi=(d_1,d_2,\cdots,d_n)\in GS_n$,若 $d_i=k(i=1,2,\cdots,n)$,则称 π 是 k-正则的. 下面是本文的主要结果.

定理 3　设 $k\geqslant 1$ 是整数且 $\pi=(k^n)\in GS_n$,则除了当 n 是偶数且 k 和 n 都是奇数时,$\psi_{\min}(\pi)=\dfrac{kn}{4}-\dfrac{1}{2}$ 外,其余情况 $\psi_{\min}(\pi)=\dfrac{1}{2}\lfloor\dfrac{n}{2}\rfloor\min\{k,\lfloor\dfrac{n}{2}\rfloor-1\}$.

定理 4　设 $k\geqslant 1$ 是一个正整数且 $\pi=(k^n)\in GS_n$.

(1)当 n 是偶数时,

(a)若 $k\leqslant\dfrac{n}{2}$,则 $\psi_{\max}(\pi)=0$;

(b)若 $k\geqslant\dfrac{n}{2}+1$,则

$$\psi_{\max}(\pi)=\begin{cases}\dfrac{(2k-n)n}{8}+\dfrac{1}{2}, & \text{当 } k \text{ 是偶数且}\dfrac{n}{2}\text{是奇数;}\\[2mm] \dfrac{(2k-n)n}{8}, & \text{其他.}\end{cases}$$

(2)当 n 是奇数时,

(a)若 $k\leqslant\frac{n-1}{2}$,则 $\psi_{\max}(\pi)=\frac{k}{2}$;

(b)若 $k\geqslant\frac{n+1}{2}$,则 $\psi_{\max}(\pi)=\frac{(2k-n+1)(n+1)}{8}$.

1 正则可图序列

本节主要证明定理 3 和定理 4. 设 π 是 k-正则可图序列,下面确定 $\psi_{\max}(\pi)$ 和 $\psi_{\min}(\pi)$ 的值. 证明将会用到以下几个结论.

定理 5(Erdös 和 Gallai[13]) 设 $\pi=(d_1,d_2,\cdots,d_n)\in NS_n$ 且 $\sum_{i=1}^{n}d_i$ 是偶数. 则 $\pi\in GS_n$ 当且仅当对任意整数 t,

$$\sum_{i=1}^{t}d_i\leqslant t(t-1)+\sum_{j=t+1}^{n}\min\{d_i,t\},\quad 1\leqslant t\leqslant n$$

都成立.

设 $P:=(p_1,p_2,\cdots,p_m)$,$Q:=(q_1,q_2,\cdots,q_n)$是两个非负整数序列. 如果存在一个简单二部图 $G[X,Y]$ 使得 X 和 Y 中的顶点度分别是$(p_1,p_2,\cdots,p_m)$和$(q_1,q_2,\cdots,q_n)$,那么称序列对(P,Q)是二部可图的,并称二部图 $G[X,Y]$为(P,Q)的一个实现. Gale[14] 和 Ryser[15] 分别独立地给出了关于二部可图序列的刻划定理.

定理 6(Gale[14],Ryser[15]) 设 $P:=(p_1,p_2,\cdots,p_m)$和 $Q:=(q_1,q_2,\cdots,q_n)$是两个非负整数序列且满足 $p_1\geqslant p_2\geqslant\cdots\geqslant p_m$,$q_1\geqslant q_2\geqslant\cdots\geqslant q_n$. 若 $\sum_{i=1}^{m}p_i=\sum_{i=1}^{n}q_i$,则$(P,Q)$是二部可图的当且仅当

$$\sum_{i=1}^{t}q_i\leqslant\sum_{i=1}^{m}\min\{p_i,t\},\quad 1\leqslant t\leqslant n$$

成立.

引理 1(Yin 和 Li[16]) 设 $\pi=(d_1,d_2,\cdots,d_n)\in NS_n$,$d_1=r$ 且 $\sum_{i=1}^{n}d_i$ 是偶数. 如果 $d_{r+1}\geqslant r-1$,则 $\pi\in GS_n$.

1.1 定理 3 的证明

对可图序列 $\pi=(k^n)$,我们分以下两种情况讨论:

情形 1 n 是偶数. 设 $n=2m$ 且 $\pi_1=\pi_2=(k^m)$. 那么 π_1、π_2 是 π 的一个平衡二部划分. 假设 H 是 π 的一个实现且 V_1、V_2 是 H 的一个平衡二部划分,显然 $\psi_{\min}(\pi)\geqslant\min\{e(V_1),e(V_2)\}$. 由于 $2e(V_1)+e(V_1,V_2)=2e(V_2)+e(V_1,V_2)$,那么 $e(V_1)=e(V_2)=\min\{e(V_1),e(V_2)\}$.

假设 $k\leqslant m-1$. 若 k 是偶数,由引理 1 知,$\pi_i\in GS_n$,$i=1,2$. 设 G_i 是 π_i 的一个实现且 $V(G_i)=V_i$,$i=1,2$. 令 $G=G_1+G_2$,则 G 是 π 的一个实现且

$$\frac{km}{2}\geqslant\psi_{\min}(\pi)\geqslant\min\{e(V_1),e(V_2)\}=\frac{km}{2}.$$

因此,$\psi_{\min}(\pi)=\frac{km}{2}$.

下面考虑 k 是奇数的情形. 若 m 是偶数,则 $\pi_i=(k^m)\in GS_n$,$i=1,2$. 通过类似于上面的讨论可得,$\psi_{\min}(\pi)=\frac{km}{2}$. 若 m 是奇数,那么 km 也是奇数且 $\pi_i=(k^m)\notin GS_n$. 因此,$\psi_{\min}(\pi)\leqslant\frac{km-1}{2}=\frac{kn}{4}-\frac{1}{2}$. 令 $\pi'_1=\pi'_2=(k^{m-1},k-1)$,由于 k 和 m 都是奇数,由引理 1 得 $\pi'_i\in GS_n$. 假设 G_i 是 π'_i的一个实现,其中 $V(G_i)=V_i$,$i=1,2$. 令 $G'=G_1+G_2$,同时连接图 G'中度为 $k-1$ 的顶点,记为图 G. 容易验证图 G 是 π 的一个实现且

$$\frac{km-1}{2}\geqslant\psi_{\min}(\pi)\geqslant\min\{e(V_1),e(V_2)\}=\frac{km-1}{2}.$$

因此,$\psi_{\min}(\pi)=\frac{km-1}{2}=\frac{kn}{4}-\frac{1}{2}$.

故,设 $n-1\geqslant k\geqslant m$,那么 $\psi_{\min}(\pi)\leqslant\frac{m(m-1)}{2}$.

设 $G_i=K_m$ 且 $V(G_i)=V_i(i=1,2)$,令 $\pi_1'=\pi_2'=((k+1-m)^m)$. 由定理 6,易证$(\pi_1',\pi_2')$是二部可图的. 设简单二部图 $H[V_1,V_2]$ 是(π_1',π_2')的一个实现. 显然,$G=G_1+G_2+H[V_1,V_2]$ 是 π 的一个实现. 因此,$\frac{m(m-1)}{2}\geqslant\psi_{\min}(\pi)\geqslant\min\{e(V_1),e(V_2)\}=\frac{m(m-1)}{2}$. 故,$\psi_{\min}(\pi)=\frac{m(m-1)}{2}$.

情形 2　n 是奇数. 设 $n=2m+1$,那么 k 是偶数.

设 $k\leqslant m-1$ 且 $\pi_1=(k^{m+1})$,$\pi_2=(k^m)$,那么 $\psi_{\min}(\pi)\leqslant\frac{km}{2}$. 根据引理 1,$\pi_1$、$\pi_2\in GS_n$. 假设 G_i 是 π_i 的一个实现,其中 $V(G_i)=V_i$ 且 $G=G_1+G_2$. 那么 G 是 π 的一个实现. 所以,$\frac{km}{2}\geqslant\psi_{\min}(\pi)\geqslant\min\{e(V_1),e(V_2)\}=e(V_2)=\frac{km}{2}$. 因此,$\psi_{\min}(\pi)=\frac{km}{2}$.

若 $k=n-1=2m$,则完全图 K_n 是 π 唯一的实现,且 $\psi_{\min}(\pi)=\frac{m(m-1)}{2}$.

下面考虑 $n-2=2m-1\geqslant k\geqslant m$. 则 $\psi_{\min}(\pi)\leqslant\frac{m(m-1)}{2}$.

设 $G_i=K_m$,$V(G_i)=V_i'(i=1,2)$ 且 $\pi'=(k^{n_1},(k-1)^{n_2})$,其中 $n_1+n_2=2m$,$n_2=k$. 令 $\pi_1'=(p_1,\cdots,p_m)=((k+1-m)^{n_1/2},(k-m)^{n_2/2})$,$\pi_2'=(q_1,\cdots,q_m)=((k+1-m)^{n_1/2},(k-m)^{n_2/2})$. 那么,

$$\sum_{j=1}^{t}q_j=\begin{cases}(k+1-m)t, & \text{若 } 1\leqslant t\leqslant\frac{n_1}{2}\\ (k+1-m)\frac{n_1}{2}+(k-m)\left(t-\frac{n_1}{2}\right), & \text{若 }\frac{n_1}{2}<t\leqslant m\end{cases}\tag{1}$$

且

$$\sum_{j=1}^{m}\min\{p_i,t\}=\begin{cases}mt, & \text{若 } 1\leqslant t\leqslant k-m\\ (k+1-m)\frac{n_1}{2}+(k-m)\frac{n_2}{2}, & \text{若 } k-m<t\leqslant m\end{cases}\tag{2}$$

下面我们比较 $\sum_{j=1}^{t}q_j$ 与 $\sum_{i=1}^{m}\min\{p_i,t\}$ 的大小. 由式(1)和(2),显然

$$(k+1-m)t\leqslant mt,$$

$$(k+1-m)\frac{n_1}{2}+(k-m)\left(t-\frac{n_1}{2}\right)\leqslant(k+1-m)\frac{n_1}{2}+(k-m)\frac{n_2}{2}.$$

若$\frac{n_1}{2}<k-m$ 且$\frac{n_1}{2}<t\leqslant k-m$,根据式(1)和(2),

$$\sum_{j=1}^{t}q_j=(k+1-m)\frac{n_1}{2}+(k-m)\left(t-\frac{n_1}{2}\right),$$

$$\sum_{i=1}^{m}\min\{p_i,t\}=mt,$$

因为 $2m-1\geqslant k\geqslant m$ 和$\frac{n_1}{2}<t\leqslant k-m$,

$$\sum_{j=1}^{t}q_j-\sum_{i=1}^{m}\min(p_i,t)=(k-2m)t+\frac{n_1}{2}<0.$$

若 $k-m<\frac{n_1}{2}$且 $k-m<t\leqslant\frac{n_1}{2}$,由式(1)和(2),

$$\sum_{j=1}^{t} q_j=(k+1-m)t,$$

$$\sum_{i=1}^{m} \min\{p_i,t\}=(k+1-m)\frac{n_1}{2}+(k-m)\frac{n_2}{2}.$$

显然,

$$\sum_{j=1}^{t} q_j-\sum_{i=1}^{m} \min\{p_i,t\}=(k+1-m)\left(t-\frac{n_1}{2}\right)-(k-m)\frac{n_2}{2}\leqslant 0.$$

根据定理 6,(π_1',π_2')是二部可图的. 设 $H[V_1',V_2']$是(π_1',π_2')的一个实现,令 $G'=H+G_1+G_2$,则 G'是 π'的一个实现. 设顶点 $v\notin G'$,将顶点 v 与 G'中所有 $k-1$ 度点相连,则得到 k-正则图 G. 显然 G 是 π 的一个实现. 令 $V_1=V_1'\cup v$,$V_2=V_2'$,那么 V_1,V_2 是 G 的一个平衡二部划分且

$$\frac{m(m-1)}{2}\geqslant\psi_{\min}(\pi)\geqslant\min\{e(V_1),e(V_2)\}=e(V_2)=\frac{m(m-1)}{2}.$$

因此,$\psi_{\min}(\pi)=\frac{m(m-1)}{2}$. 证毕.

1.2 定理 4 的证明

我们考虑两种情形.

情形 1 n 是偶数. 设 $n=2m$,$\pi_1=\pi_2=(k^m)$. 所以,π_1、π_2 是 π 的一个平衡二部划分. 设 H 是 π 的一个实现,且 V_1、V_2 是 H 的一个平衡二部划分,显然 $\psi_{\max}(\pi)\leqslant\max\{e(V_1),e(V_2)\}$. 由于 $2e(V_1)+e(V_1,V_2)=2e(V_2)+e(V_1,V_2)$,故 $e(V_1)=e(V_2)$.

若 $k\leqslant m$,根据定理 6,容易验证(π_1,π_2)是二部可图的. 设二部图 $G[V_1,V_2]$是(π_1,π_2)的一个实现,则 $\psi_{\max}(\pi)\leqslant\max\{e(V_1),e(V_2)\}=0$. 因此,$\psi_{\max}(\pi)=0$.

故假设 $n-1\geqslant k\geqslant m+1$,那么 $\psi_{\max}(\pi)\geqslant\frac{(k-m)m}{2}=\frac{(2k-n)n}{8}$.

设 k 是奇数,$H[V_1,V_2]=K_{m,m}$,$\pi_1'=\pi_2'=((k-m)^m)$. 由于 k 是奇数,则$(k-m)m$ 是偶数. 由引理 1,$\pi_i'\in GS_n$,$i=1,2$. 设 G_i 是 π_i'的一个实现且 $V(G_i)=V_i$,$i=1,2$. 令 $G=H+G_1+G_2$. 容易验证 G 是 π 的一个实现且

$$\frac{(2k-n)n}{8}\leqslant\psi_{\max}(\pi)\leqslant\max\{e(V_1),e(V_2)\}=\frac{(k-m)m}{2}=\frac{(2k-n)n}{8}.$$

因此,$\psi_{\max}(\pi)=\frac{(2k-n)n}{8}$.

下面考虑 k 是偶数的情形. 若 m 是偶数,由引理 1 得$((k-m)^m)\in GS_n$. 类似于之前讨论,$\psi_{\max}(\pi)=\frac{(2k-n)n}{8}$. 若 m 是奇数,那么$(k-m)m$ 也是奇数,$((k-m)^m)\notin GS_n$. 故,$\psi_{\max}(\pi)\geqslant\frac{(k-m)m+1}{2}$. 设 $H[V_1,V_2]=K_{m,m}$,在 H 中将 V_1、V_2 的第一对顶点的边删除得到图 H'. 设 $\pi_1'=\pi_2'=(k+1-m,(k-m)^{m-1})$. 因为 k 和 n 都是偶数,那么 $k<n-1=2m-1$. 由引理 1 可得,$\pi_i'\in GS_n$. 设 G_i 是 π_i'的一个实现且 $V(G_i)=V_i$,$i=1,2$. 令 $G=H'+G_1+G_2$. 显然 G 是 π 的一个实现且

$$\frac{(k-m)m+1}{2}\leqslant\psi_{\max}(\pi)\leqslant\max\{e(V_1),e(V_2)\}=\frac{(k-m)m+1}{2}.$$

因此,$\psi_{\max}(\pi)=\frac{(2k-n)n}{8}+\frac{1}{2}$.

情形 2 n 是奇数. 设 $n=2m+1$,那么 k 必是偶数.

设 $\pi_1=(k^{m+1})$,$\pi_2=(k^m)$,则 π_1、π_2 是 π 的一个平衡二部划分. 设 H 是 π 的一个实现,V_1、V_2 是 H 的一个平衡二部划分,其中 V_i 在 H 中的度序列为 $\pi_i(i=1,2)$. 由于

$$2e(V_1)+e(V_1,V_2)=(m+1)k=\frac{(n+1)k}{2},2e(V_2)+e(V_1,V_2)=km=\frac{(n-1)k}{2}.$$

因此 $e(V_1)=e(V_2)+\frac{k}{2}$. 故 $\psi_{\max}(\pi)\geqslant\frac{k}{2}$.

下面我们证明 $k\leqslant m$ 的情形成立. 设 $\pi'=(k^{n_1},(k-1)^{n_2})$ 且 $\pi'_1=(p_1,\cdots,p_m)=(k^{n_1/2},(k-1)^{n_2/2})$, $\pi'_2=(q_1,\cdots,q_m)=(k^{n_1/2},(k-1)^{n_2/2})$, 其中 $n_1+n_2=2m$ 且 $n_2=k$. 那么, π'_1, π'_2 是 π' 的一个平衡二部划分. 这里,

$$\sum_{j=1}^{t} q_j=\begin{cases} kt, & \text{若 } 1\leqslant t\leqslant \dfrac{n_1}{2} \\ k\dfrac{n_1}{2}+(k-1)\left(t-\dfrac{n_1}{2}\right), & \text{若 } \dfrac{n_1}{2}<t\leqslant m \end{cases} \tag{3}$$

且

$$\sum_{i=1}^{m} \min\{p_i,t\}=\begin{cases} mt, & \text{若 } 1\leqslant t\leqslant k-1 \\ k\dfrac{n_1}{2}+(k-1)\dfrac{n_2}{2}, & \text{若 } k-1<t\leqslant m \end{cases} \tag{4}$$

接下来我们比较 $\sum_{j=1}^{t} q_j$ 和 $\sum_{i=1}^{m} \min\{p_i,t\}$ 的大小. 显然, 由(3)和(4)得 $kt\leqslant mt$ 且

$$k\frac{n_1}{2}+(k-1)\left(t-\frac{n_1}{2}\right)\leqslant k\frac{n_1}{2}+(k-1)\frac{n_2}{2}.$$

若 $\dfrac{n_1}{2}<k-1$, $\dfrac{n_1}{2}<t\leqslant k-1$, 由(3)和(4)得,

$$\sum_{j=1}^{t} q_j=k\frac{n_1}{2}+(k-1)\left(t-\frac{n_1}{2}\right);$$

$$\sum_{i=1}^{m} \min\{p_i,t\}=mt.$$

据 $k\leqslant m$ 和 $\dfrac{n_1}{2}<t\leqslant k-1$ 可知

$$\sum_{j=1}^{t} q_j-\sum_{i=1}^{m} \min\{p_i,t\}=(k-m)t+(n_1/2-t)<0$$

若 $k-1<\dfrac{n_1}{2}$, $k-1<t\leqslant \dfrac{n_1}{2}$, 由(3)和(4)得,

$$\sum_{j=1}^{t} q_j=kt;$$

$$\sum_{i=1}^{m} \min\{p_i,t\}=k\frac{n_1}{2}+(k-1)\frac{n_2}{2}.$$

显然,

$$\sum_{j=1}^{t} q_j-\sum_{i=1}^{m} \min\{p_i,t\}=k\left(t-\frac{n_1}{2}\right)-(k-1)\frac{n_2}{2}\leqslant 0$$

由定理 6, (π'_1,π'_2) 是二部可图的. 设 $G'[V'_1,V'_2]$ 是 (π'_1,π'_2) 的一个实现, 则 $G'[V'_1,V'_2]$ 也是 $\pi'=(k^{n_1},(k-1)^{n_2})$ 的一个实现. 因此, $\max\{e(V'_1),e(V'_2)\}=0$. 设顶点 $v\notin G'$, 将顶点 v 与 G' 中所有 $k-1$ 度点相连, 则得到 k-正则图 G. 显然 G 是 π 的一个实现. 令 $V_1=V'_1\cup v$, $V_2=V'_2$, 那么 V_1、V_2 是 G 的一个平衡二部划分且 $\max\{e(V_1),e(V_2)\}=e(V_1)=\dfrac{n_2}{2}=\dfrac{k}{2}$.

因此, $\dfrac{k}{2}\leqslant \psi_{\max}(\pi)\leqslant \max\{e(V_1),e(V_2)\}=\dfrac{k}{2}$, 且 $\psi_{\max}(\pi)=\dfrac{k}{2}$.

下面我们讨论 $n-1\geqslant k\geqslant m+1$ 的情形. 则, $\psi_{\max}(\pi)\geqslant \dfrac{(k-m)(m+1)}{2}$.

设 $H[V_1,V_2]=K_{m+1,m}$, 且 $\pi'_1=((k-m)^{m+1})$, $\pi'_2=((k-m-1)^{m})$. 由于 k 是偶数, 所以 $(k-m)(m+1)$ 和 $(k-m-1)m$ 都是偶数. 由引理 1 知, $\pi'_i\in GS_n$, $i=1,2$. 设 G_i 是 π'_i 的一个实现且 $V(G_i)=V_i$. 令 $G=H+G_1+G_2$. 容易验证 G 是 π 的一个实现, 且

$$\max\{e(V_1),e(V_2)\}=e(V_1)=\frac{(k-m)(m+1)}{2}.$$

因此,

$$\frac{(k-m)(m+1)}{2}\leqslant\psi_{\max}(\pi)\leqslant\max\{e(V_1),e(V_2)\}=\frac{(k-m)(m+1)}{2},$$

且

$$\psi_{\max}(\pi)=\frac{(k-m)(m+1)}{2}=\frac{(2k-n+1)(n+1)}{8}.$$

证毕

[参考文献]

[1] BONDY J A,MURTY U S R. Graphy theory with applications[M]. NewYork:Macmillan Ltd Press,1976.

[2] GAREY M R,JOHNSON D S,STOCKMEYER L J. Some simplified NP-completet graph proble-ms[J]. Theor Comput Sci,1976,1:237-267.

[3] KARPINSKI M. On approximability of minimum bisection problem[C]//Electronic Colloquium on Computational Complexity. Trier,Germany,2002.

[4] BOLLOBÁS B,SCOTT A D. Problems and results on judicious partitions[J]. Random Struct and Alg,2002,21:414-430.

[5] BOLLOBÁS B,SCOTT A D. Judicious partitions of graph[J]. Period Math Hungar,1993,26:125-137.

[6] BOLLOBÁS B,SCOTT A D. Exact bounds for judicious partitions of graphs[J]. Combinatorica,1999,19:73-486.

[7] BOLLOBÁS B,SCOTT A D. Judicious partitions of bounded-degree graphs[J]. J graph theory,2004,46:131-143.

[8] XU B G,YAN J,YU X X. Balanced judicious bipartitions of graphs[J]. J graph theory,2010,63:210-225.

[9] XU B G,YAN J,YU X X. A note on balanced bipartitions[J]. Discrete Math,2010,310:2613-2617.

[10] XU B G,YU X X. Judicious k-partitions of graphs[J]. J combin theory Ser B,2009,99:324-337.

[11] XU B G,YU X X. Better bounds for k-partitions of graphs[J]. Combinatorics,probability and computing,2011,20:631-640.

[12] XU B G,YU X X. On judicious bisections of graphs[J]. J combin theory Ser B,2014,106:30-69.

[13] ERDÖS P,GALLAI T. Graphs with prescribed degrees of vertices[J]. Mat Lapok,1960,11:264-274.

[14] GALE D. A theorem on flows in networks[J]. Pacific J Math,1957,7:1073-1082.

[15] RYSER H J. Combinatorial properties of matrices of zeros and ones[J]. Canad J Math,1957,9:371-377.

[16] YIN J H,LI J S. Two sufficient conditions for a graphic sequence to have a realization with prescribed clique size[J]. Discrete Math,2005,301:218-227.

[责任编辑:陆炳新]