

# 一维 Stefan 问题的浸入界面方法

纪海峰

(南京邮电大学理学院, 江苏 南京 210023)

[摘要] 考虑经典的一维 Stefan 问题的浸入界面数值求解方法. 基于与移动的界面位置无关的网格, 构造出时间方向具有一阶精度, 空间方向具有二阶精度的有限差分方法. 最后, 一些数值例子验证了该方法的收敛精度.

[关键词] 界面问题, 浸入界面, 移动界面

[中图分类号] O242 [文献标志码] A [文章编号] 1001-4616(2018)02-0012-04

## An Immersed Interface Method for One Dimensional Stefan Problems

Ji Haifeng

(School of Science, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing 210023, China)

**Abstract:** This paper is considered with the immersed interface numerical methods for solving the classic one dimensional Stefan problem. Based on the grid which is independent of the moving interface, a finite different method with first order accuracy in time and second order accuracy in space is developed. Finally, some numerical examples are presented to show the accuracy of the method.

**Key words:** interface problem, immersed interface, moving interface

Stefan 问题的难点在于追踪界面的位置, 例如模拟冰和水的交界面的变化过程. 由于界面随着时间会发生变化, 这类问题也称为移动界面问题. 对这类问题, 目前已有许多数值求解方法, 例如[1-2]等. 这些方法都是采用拟合界面的网格剖分, 即界面附近的网格点必须落在界面上. 界面拟合网格法有着许多缺点. 首先, 对于形状复杂的界面, 尤其在三维空间中, 生成正则的界面拟合网格往往比较困难. 其次, 如果界面随时间移动, 那么在每一时间步都需要重新生成界面拟合网格, 这增加了算法的复杂度和计算量. 为了克服界面拟合网格的缺点, 有学者提出了非拟合网格方法, 即网格的生成与界面无关, 允许界面以任意方式穿过网格单元的内部. 在实际计算中, 一般使用结构化的网格, 例如笛卡尔网格等. 非拟合网格法在处理移动界面问题上有着不可替代的优点, 故一直受到工程界和计算数学界的广泛关注.

非拟合网格方法的思想要追溯到 Peskin 在 1977 年提出来的浸入边界方法<sup>[3]</sup>. 该方法简单、易实现且具有鲁棒性, 但只有一阶精度. 1994 年 Leveque 和 Li<sup>[4]</sup>对于带有间断系数和奇异源项的二阶椭圆界面问题提出了浸入界面方法. 该方法为基于笛卡尔网格, 把界面条件耦合到差分格式中, 使得截断误差在不规则点处达到  $O(h)$ , 从而不仅能使解的整体误差达到  $O(h^2)$ , 而且其导数也达到  $O(h^2)$  精度<sup>[5]</sup>. 随后该方法被推广到流体界面问题<sup>[6-7]</sup>、弹性界面问题<sup>[8]</sup>以及移动界面问题<sup>[9-10]</sup>等.

本文研究一维 Stefan 问题的浸入界面方法. 利用界面跳跃条件, 本文构造出时间方向具有一阶精度, 空间方向具有二阶精度的有限差分格式. 然后给出一些数值算例来验证该方法的收敛精度.

## 1 模型问题

考虑凝固或融化的过程, 设  $[a, b]$  为计算区域,  $\alpha(t)$  表示两个物体的交界面,  $[a, \alpha(t)]$  与  $[\alpha(t), b]$  分别表示两种物体所占的区域. 为了叙述简单, 假设两种物体的扩散系数以及密度相同, 为单位 1, 而且不考

收稿日期: 2017-12-10.

基金项目: 国家自然科学基金青年项目(11701291)、江苏省自然科学基金青年项目(BK20160880)、南京邮电大学引进人才科研启动基金(NY216030).

通讯联系人: 纪海峰, 博士, 讲师, 研究方向: 计算数学. E-mail: hfji@njupt.edu.cn

考虑凝固或融化带来的体积变化,那么温度  $u(x, t)$  在两个区域上分别满足经典的扩散方程

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + f(x, t), x \in [a, \alpha(t)] \cup [\alpha(t), b]. \quad (1)$$

以及初边值条件

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u_0(x), x \in [a, b], \\ u(a, t) &= u_a(t), u(b, t) = u_b(t), t \in [0, T]. \end{aligned}$$

在界面  $\alpha(t)$  上,需要满足如下 Stefan 条件

$$\begin{aligned} u(\alpha(t), t) &= u_M, t \in [0, T], \\ \frac{d\alpha(t)}{dt} &= \theta \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \right] = \theta \frac{\partial u^+}{\partial x} - \theta \frac{\partial u^-}{\partial x}, t \in [0, T]. \end{aligned}$$

其中,  $u_M$  为给定的常数,表示凝固点或熔点.  $\theta$  为给定的参数,  $u^- = u|_{[a, \alpha(t)]}$ ,  $u^+ = u|_{[\alpha(t), b]}$ .

## 2 浸入界面方法

将区间  $[a, b]$  分成  $N$  等分,网格节点为  $x_i = a + ih, i = 0, 1, \dots, N$ . 其中剖分长度为  $h = (b - a)/N$ . 对某一时间  $t$ , 如果  $x_k < \alpha(t) \leq x_{k+1}$ , 那么我们把网格节点  $x_k$  与  $x_{k+1}$  称为不规则点,其余的网格节点称为规则点. 由于方程的解在界面  $\alpha(t)$  处不光滑,因此构造的差分格式需要在不规则点处进行修正,而在规则点处可以使用经典的差分格式.

在时间方向上,取时间步长  $\tau = T/M$ ,则时间节点为  $t_n = \tau n, n = 0, 1, \dots, M$ . 令  $u_i^n$  表示节点  $(x_i, t_n)$  处的数值解,而  $u(x_i, t_n)$  为节点  $(x_i, t_n)$  处的精确解. 同样地,令  $\alpha^n$  表示时间  $t_n$  处数值界面的位置. 下面构造求解  $u_i^n$  和  $\alpha^n$  的数值计算格式.

### 2.1 空间离散

如果  $x_i$  为规则点,对于扩散方程(1)有经典的差分格式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + f(x_i, t), i = 1, 2, \dots, N-1.$$

通过泰勒展开式,我们得到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u(x_{i+1}, t_n) - 2u(x_i, t_n) + u(x_{i-1}, t_n)}{h^2} + O(h^2).$$

即该格式在规则点处的空间方向截断误差为  $O(h^2)$ .

在不规则点  $x_k$  处,利用浸入界面方法的思想,我们构造如下格式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}}{h^2} + f(x_k, t) + C_k(t).$$

式中,修正项

$$C_k(t) = -\frac{1}{h^2} [u](\alpha(t), t) - \frac{x_{k+1} - \alpha}{h^2} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \right](\alpha(t), t) - \frac{(x_{k+1} - \alpha)^2}{2h^2} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right](\alpha(t), t). \quad (2)$$

通过修正,不规则点处的空间方向截断误差为  $O(h)$ ,从而整体误差能达到最优精度<sup>[5]</sup>. 然而,修正项式(2)中  $[u] = 0$  已知,而另外两项均未知. 因此,我们定义增广变量

$$g(t) = \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \right](\alpha(t), t).$$

对界面条件  $[u](\alpha(t), t) = 0$  两边同时对时间  $t$  求导,得到

$$\left[ \frac{\partial u}{\partial x} \right] \cdot \frac{d\alpha}{dt} + \left[ \frac{\partial u}{\partial t} \right] = 0. \quad (3)$$

由式(1)得到

$$\left[ \frac{\partial u}{\partial t} \right] = \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] + [f]. \quad (4)$$

结合式(3)、式(4)以及 Stefan 条件,我们有

$$\left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] = - \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \right] \cdot \frac{d\alpha}{dt} - [f] = -\theta g^2 - [f].$$

因此,在增广变量  $g(t)$  给定的情况下,修正项式(2)变为

$$C_k(t) = -\frac{(x_{k+1}-\alpha)g}{h^2} + \frac{(x_{k+1}-\alpha)^2(\theta g^2 + [f])}{2h^2}.$$

在不规则点  $x_{k+1}$  处,类似地,我们有修正项

$$C_{k+1}(t) = \frac{(x_k-\alpha)g}{h^2} - \frac{(x_k-\alpha)^2(\theta g^2 + [f])}{2h^2}.$$

为了符号统一,在规则点  $x_i$  处我们定义修正项  $C_i(t) = 0$ .

## 2.2 时间离散

首先,对于界面移动方程,我们用如下格式

$$\frac{\alpha^n - \alpha^{n-1}}{\tau} = \theta g(t_{n-1}). \quad (5)$$

这里  $g(t_{n-1})$  为增广变量在  $t_{n-1}$  时间层的值.

其次,对于扩散方程,我们采用隐式 Euler 格式,即

$$\frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\tau} = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} + f(x_i, t_n) + C_i(t_n) - D(t_n). \quad (6)$$

式中,  $C_i(t_n)$  为空间方向修正项,  $D(t_n)$  为时间方向修正项.

如果节点  $x_i$  在时间段  $(t_{n-1}, t_n)$  没有界面穿过,即节点  $x_i$  在  $(t_{n-1}, t_n)$  内属于同一区间  $[a, \alpha(t)]$  或  $[\alpha(t), b]$ , 则我们有

$$\frac{du}{dt} = \frac{u^n - u^{n-1}}{\tau} + O(\tau).$$

这时修正项  $D(t_n) = 0$ .

如果节点  $x_i$  在时间段  $(t_{n-1}, t_n)$  有界面  $\alpha$  穿过,即节点  $x_i$  在  $(t_{n-1}, t_n)$  内跨越两个区间  $[a, \alpha(t)]$  和  $[\alpha(t), b]$ , 则利用浸入界面方法的思想得到修正项

$$D(t_n) = -\frac{t_n - t^*}{2h} \left[ \frac{\partial u}{\partial t} \right] = \frac{(t_n - t^*)\theta g^2(t_n)}{2h}.$$

式中,  $t^* = t_{n-1} + \frac{\tau(x_i - \alpha^{n-1})}{\alpha^n - \alpha^{n-1}}$  表示界面  $\alpha$  穿过节点  $x_i$  的时间.

## 2.3 增广变量的求解

给定增广变量  $g(t_n)$  以及第  $n-1$  时间层的数值解  $u_i^{n-1}, \alpha^{n-1}, g(t_{n-1})$ , 利用差分格式(5)和式(6), 可解出第  $n$  层的数值解. 给定不同的  $g(t_n)$ , 可得到不同的数值解. 然而增广变量的选择要使得 Stefan 条件  $u(\alpha(t), t) = u_M$  满足. 假设  $x_k < \alpha^n \leq x_{k+1}$ , 在数值格式中, 第  $n$  层的数值解需要满足

$$u_k^n + \frac{u_{k+1}^n - u_k^n}{h} \cdot (\alpha^n - x_k) + \bar{C}_k = u_M. \quad (7)$$

式中, 修正项

$$\bar{C}_k = -\frac{\alpha^n - x_k}{h} \left( (x_{k+1} - \alpha^n)g(t_n) + \frac{(x_{k+1} - \alpha^n)^2}{2} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] \right) = -\frac{\alpha^n - x_k}{h} \left( (x_{k+1} - \alpha^n)g(t_n) - \frac{(x_{k+1} - \alpha^n)^2(\theta g^2(t_n) + [f])}{2} \right).$$

联立(5)~(7), 利用文献[11]的方法, 我们可以先把增广变量  $g$  求出, 然后再利用式(5)、(6)求出第  $n$  层的数值解  $u_i^n, \alpha^n$ . 需要注意的是, 初始层  $u_i^0, \alpha^0, g(t_0)$  的值由初始条件给出.

## 3 数值实验

为了验证该方法的有效性, 我们构造如下精确解. 对任意的时间  $t \in [0, T]$ , 有

$$u(x, t) = \begin{cases} \left( -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x) - \left( -\frac{1}{2}\alpha(t) - \frac{1}{4}\sin(2\alpha(t)) \right) \right) \sin t, & x \in [a, \alpha(t)], \\ \left( \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x) - \left( \frac{1}{2}\alpha(t) - \frac{1}{4}\sin(2\alpha(t)) \right) \right) \sin t, & x \in [\alpha(t), b]. \end{cases}$$

式中,移动界面为

$$\alpha(t) = \theta(1 - \cos t).$$

通过简单计算,很容易验证该精确解满足 Stefan 条件,且  $u_M = 0$ . 右端项  $f(x, t)$  和初边值条件可以由精确解确定. 我们选取参数  $a = -1, b = \frac{\pi}{2}, \theta = \frac{1}{2}, T = 2.5$ .

首先,我们测试空间方向的收敛阶. 为了使得时间方向的误差足够小,我们选取  $M = 500$ ,即时间步长  $\tau = 0.005$ . 此时解的无穷模误差随空间步长  $h$  的变化关系如图 1 所示. 由图像可见空间方向为二阶收敛. 且当  $h$  非常小时,时间离散误差占主导,此时整体误差不再随  $h$  变化.

然后,测试时间方向的收敛阶. 选取  $N = 100$ ,解的无穷模误差随时间步长  $\tau$  的变化关系如图 2 所示. 由图像可见时间方向为一阶收敛,当  $\tau$  非常小时,整体误差不再随  $\tau$  变小而变小.

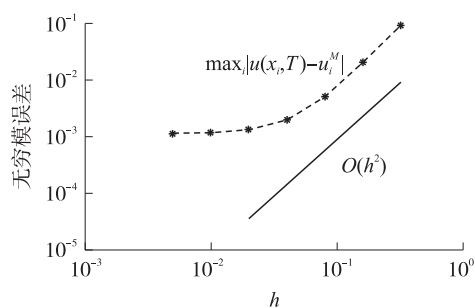


图 1 误差曲线 ( $M=500$ )

Fig. 1 Error curves ( $M=500$ )

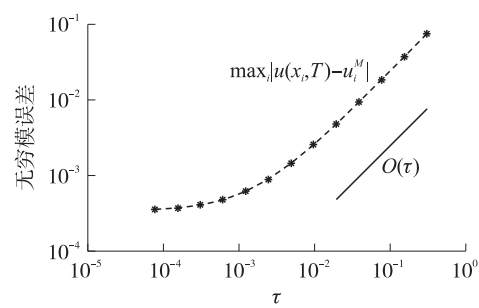


图 2 误差曲线 ( $N=100$ )

Fig. 2 Error curves ( $N=100$ )

### [参考文献]

- [1] TADI M. A fixed-grid local method for 1-D Stefan problems[J]. Applied mathematics and computation, 2012, 219(4): 2331–2341.
- [2] SONG T, UPRETI K, SUBBARAYAN G. A sharp interface isogeometric solution to the Stefan problem[J]. Computer methods in applied mechanics and engineering, 2015, 284: 556–582.
- [3] PESKIN C S. Numerical analysis of blood flow in the heart[J]. Journal of computational physics, 1977, 25(3): 220–252.
- [4] LEVEQUE R, LI Z. The immersed interface method for elliptic equations with discontinuous coefficients and singular sources[J]. SIAM J Numer Anal, 1994, 31(4): 1019–1044.
- [5] BEALE J, LAYTON A. On the accuracy of finite difference methods for elliptic problems with interfaces[J]. Communications in applied mathematics and computational science, 2008, 1(1): 91–119.
- [6] LEVEQUE R, LI Z. Immersed interface methods for stokes flow with elastic boundaries or surface tension[J]. SIAM journal on scientific computing, 1997, 18(3): 709–735.
- [7] LEE L, LEVEQUE R. An immersed interface method for incompressible Navier-Stokes equations[J]. SIAM journal on scientific computing, 2006, 25(3): 832–856.
- [8] YANG X, LI B, LI Z. The immersed interface method for elasticity problems with interfaces[J]. Dynamics of continuous discrete and impulsive systems, 2002, 10(5): 783–808.
- [9] TAN Z, LE D, LI Z, et al. An immersed interface method for solving incompressible viscous flows with piecewise constant viscosity across a moving elastic membrane[J]. Journal of computational physics, 2008, 227(23): 9955–9983.
- [10] TAN Z, LIM K, KHOO B. An immersed interface method for Stokes flows with fixed/moving interfaces and rigid boundaries[J]. Journal of computational physics, 2009, 228(18): 6855–6881.
- [11] JI H, CHEN J, LI Z. A new augmented immersed finite element method without using SVD interpolations[J]. Numerical algorithms, 2016, 71: 395–416.

[责任编辑:陈 庆]