doi:10.3969/j.issn.1001-4616.2018.04.003

分担集合的正规亚纯函数

黄小杰[1,2],刘芝秀[1],李运通[3]

(1.南昌工程学院理学院,江西 南昌 330099)
(2.复旦大学数学科学学院,上海 杨浦 200433)
(3.陕西铁路职业技术学院,陕西 渭南 714000)

[**摘要**] 研究了涉及函数与其高阶导数分担集合的亚纯函数正规条件,利用 Lohwater-Pommerenke 定理和 Zalcman-Pang 引理以及 Nevanlinna 理论证明了如下结论,设 $S_1=\{a_1,a_2,a_3\}$ 和 $S_2=\{b_1,b_2\}$ 是由互异有限复数构成的集合,$k\geqslant 2$ 是一个正整数,$f(z)$ 是单位圆 Δ 内的亚纯函数,如果 $f(z)-a_i$ 的零点重数都至少为 k,$i=1,2,3$,且 $\{z\in\Delta|f(z)\in S_1\}=\{z\in\Delta|f^{(k)}(z)\in S_2\}$,那么 $f(z)$ 是 Δ 上的正规函数.

[**关键词**] 正规函数,正规族,分担集合

[**中图分类号**]O174.5 [**文献标志码**]A [**文章编号**]1001-4616(2018)04-0012-07

Normal Function Related to Shared Sets

Huang Xiaojie[1,2],Liu Zhixiu[1],Li Yuntong[3]

(1.Department of Science,Nanchang Institute of Technology,Nanchang 330099,China)
(2.School of Mathematic Sciences,Fudan University,Shanghai 200433,China)
(3.Shanxi Railway Institute,Weinan 714000,China)

Abstract:This paper studies the normal conditions of meromorphic function relating to sharing sets by the function and its higher derivatives. By use of Lohwater-Pommerenke's theorem and Zalcman-Pang's lemma as well as Nevanlinna theory,it proves that let $S_1=\{a_1,a_2,a_3\}$ and $S_2=\{b_1,b_2\}$ be two sets consisting of different finite complex numbers,$k\geqslant 2$ be a positive integer number,if $f(z)$ be a meromorphic function on unit circle domain Δ such that the zeros of $f(z)-a_i$ have multiplicity at least k,$i=1,2,3$ and $\{z\in\Delta|f(z)\in S_1\}=\{z\in\Delta|f^{(k)}(z)\in S_2\}$,then $f(z)$ is a normal function on domain Δ.

Key words:normal function,normal family,shared set

1 引言及主要结果

设 D 为复平面$\mathbb{C}$ 的一个区域,Σ 是定义在区域 D 上的一族亚纯函数,如果对于 Σ 中的任意函数列 $\{f_n(z)\}$ 都存在子列 $\{f_{n_k}(z)\}$ 在区域 D 上按球面距离内闭一致收敛,则称 Σ 为区域 D 上的正规族. 而函数族 Σ 在点 z_0 正规,是指存在点 z_0 的某邻域 $U(z_0)$ 使得 Σ 在 $U(z_0)$ 上正规. Σ 在区域 D 上正规等价于 Σ 在区域 D 上每一点都正规[1].

$\Delta=\{z:|z|<1\}$ 为复平面上的单位圆,$\mathrm{Aut}(\Delta)$ 是 Δ 上的全纯自同构群,$f(z)$ 是 Δ 上的亚纯函数,如果函数族 $\{f(M(z))|M(z)\in\mathrm{Aut}(\Delta)\}$ 是 Δ 上的正规族,则称 $f(z)$ 是 Δ 上的正规函数[1].

由于正规函数是用正规族来定义,那么自然要问:对应一个函数族的正规定则,是否应该有一个函数的正规定则? Hayman 和 Storvick 给出了反例[2],对于 Miranda-顾正规定则[3]却存在一个 Δ 上的非正规函数 $f(z)$,它满足 $f(z)\neq 0$ 且 $f^{(k)}(z)\neq 1$,其中 k 是一个正整数. 所以,对应一个函数族正规定则是否有对应的函数正规定则需要进一步探讨[4].

定理 A[4] 设 $\sum=\{f(z)\}$ 是区域 D 内的一族亚纯函数,$S=\{a_1,a_2,a_3\}$,其中 a_1,a_2,a_3 是 3 个互异

收稿日期:2017-11-19.

基金项目:国家自然科学基金(11671091、11771090)、上海市自然科学基金(17ZR1402900)、陕西省教育厅专项基金(17JK0170)、江西省教育厅科技项目(GJJ180944).

通讯联系人:黄小杰,博士,讲师,研究方向:复分析. E-mail:xjhuang14@fudan.edu.cn

的有限复数,如果对任意的 $f\in\sum$,有 $\{z|f(z)\in S\}=\{z|f'(z)\in S\}$,那么 $\sum$ 在 D 内正规.

定理 B[5] 设 $\sum=\{f(z)\}$ 是区域 D 内的一族亚纯函数,$S=\{a_1,a_2\}$,a_1,a_2 是扩充复平面上两个互异的非零复数,且满足 $a_1/a_2\in\Omega:=\{z\in\overline{\mathbb{C}}\,|z\in\hat{\Delta}(1,1)$ 或者 $1/z\in\hat{\Delta}(1,1)\}$,其中 $\hat{\Delta}(1,1):=\{z\in\mathbb{C}\,||z-1|<1$ 或者对某个正整数 k 有 $(z-1)^k=1$ 成立$\}$. 如果对任意的 $f\in\sum$,$\{z|f(z)\in S\}=\{z|f'(z)\in S\}$,则 $\sum$ 在 D 内正规.

徐焱和仇惠玲最近在文献[6]中建立了相应的函数正规定则

定理 C[6] 设 $f(z)$ 是单位圆 Δ 内的亚纯函数,$S_1=\{a_1,a_2,a_3\}$ 和 $S_2=\{b_1,b_2,b_3\}$ 是由互异有限复数构成的两个集合,如果满足

$$\{z\in\Delta|f(z)\in S_1\}=\{z\in\Delta|f'(z)\in S_2\},$$

那么 $f(z)$ 是 Δ 上的正规函数.

定理 D[6] 设 $f(z)$ 是单位圆 Δ 内的亚纯函数,$S_1=\{a_1,a_2,a_3\}$ 和 $S_2=\{b_1,b_2\}$ 是由互异有限复数构成的两个集合,如果满足

(1) $b_1/b_2\notin\{m|m<0,m\in\mathbf{Z}\}\cup\left\{\dfrac{1}{m}\Big|m<0,m\in\mathbf{Z}\right\}$,

(2) $\{z\in\Delta|f(z)\in S_1\}=\{z\in\Delta|f'(z)\in S_2\}$,

那么 $f(z)$ 是 Δ 上的正规函数.

定理 E[6] 设 $f(z)$ 是单位圆 Δ 内的亚纯函数,$S_1=\{a_1,a_2\}$ 和 $S_2=\{b_1,b_2\}$ 是由互异有限复数构成的两个集合,如果满足

(1) $a_1a_2\neq0$;

(2) $b_1/b_2\notin\{m|m<0,m\in\mathbf{Z}\}\cup\left\{\dfrac{1}{m}\Big|m<0,m\in\mathbf{Z}\right\}$;

(3) 存在正数 M 使得 $f(z)=0\Rightarrow|f'(z)|\leqslant M$;

(4) $\{z\in\Delta|f(z)\in S_1\}=\{z\in\Delta|f'(z)\in S_2\}$.

那么 $f(z)$ 是 Δ 上的正规函数.

本文考虑了高阶导数的情况,推广了以上有关正规函数的定理.

定理 1 设 $f(z)$ 是单位圆 Δ 内的亚纯函数,$S_1=\{a_1,a_2,a_3\}$ 和 $S_2=\{b_1,b_2,b_3\}$ 是由互异有限复数构成的两个集合,如果满足

(1) $k\geqslant2$ 是一个正整数,$f(z)-a_i$ 的零点重数都至少为 k,$i=1,2,3$,

(2) $\{z\in\Delta|f(z)\in S_1\}=\{z\in\Delta|f^{(k)}(z)\in S_2\}$,

那么 $f(z)$ 是 Δ 上的正规函数.

定理 2 设 $f(z)$ 是单位圆 Δ 内的亚纯函数,$S_1=\{a_1,a_2,a_3\}$ 和 $S_2=\{b_1,b_2\}$ 是由互异有限复数构成的集合,如果满足

(1) $k\geqslant2$ 是一个正整数,$f(z)-a_i$ 的零点重数都至少为 k,$i=1,2,3$;

(2) $\{z\in\Delta|f(z)\in S_1\}=\{z\in\Delta|f^{(k)}(z)\in S_2\}$.

那么 $f(z)$ 是 Δ 上的正规函数.

定理 3 设 $f(z)$ 是单位圆 Δ 内的亚纯函数,$S_1=\{a_1,a_2\}$ 和 $S_2=\{b_1,b_2\}$ 是由互异有限复数构成的集合,如果满足

(1) $k\geqslant2$ 是一个正整数,$f(z)-a_i$ 的零点重数都至少为 k,$i=1,2$;

(2) $a_1a_2\neq0$;

(3) 存在正数 M 使得 $f(z)=0\Rightarrow|f'(z)|\leqslant M$;

(4) $\{z\in\Delta|f(z)\in S_1\}=\{z\in\Delta|f^{(k)}(z)\in S_2\}$.

那么 $f(z)$ 是 Δ 上的正规函数.

对比上述定理可以看出,在不计零点重数这一常规条件的意义下,涉及高阶导数时定理成立的条件可更简洁.

2 基本公式和引理

引理 1[7]　设 $f(z)$ 是单位圆 Δ 内的亚纯函数,如果 $f(z)$ 不是正规函数,则存在(1)复数列 $z_n\in\Delta$;(2)正数列 $\rho_n\to0^+$,使得 $g_n(z)=f(z_n+\rho_n z)$ 按球面距离内闭一致收敛于复平面$\mathbb{C}$ 上的非常数亚纯函数 $g(z)$.

引理 2[8,9]　设 $\sum$ 是区域 D 上的亚纯函数族,k 是一个正整数,如果对任意的 $f\in\sum$ 有 f 的零点重数至少为 k,且存在一个正数 A,使得 $f(z)=0\Rightarrow|f^{(k)}(z)|\leqslant A$. 那么,如果 $\sum$ 在 D 中 z_0 处不正规,则对任意的 $0\leqslant\alpha\leqslant k$,存在

(1)复数列 $z_n\in D, z_n\to z_0$;　(2)正数列 $\rho_n\to0^+$;　(3)函数列 $f_n\in\sum$,使得 $g_n(\zeta)=\dfrac{f_n(z_n+\rho_n\zeta)}{\rho_n^{\alpha}}$ 按球面距离内闭一致收敛于复平面$\mathbb{C}$ 上的非常数亚纯函数 $g(\zeta)$,进一步地有,$g(\zeta)$ 的所有零点重数都至少为 k,球面导数 $g^{\#}(\zeta)=\dfrac{|g'(\zeta)|}{1+|g(\zeta)|^2}\leqslant g^{\#}(0)=kA+1$,且 $g(\zeta)$ 的级不超过 2.

引理 3[10]　设 $f(z)$ 是复平面$\mathbb{C}$ 上的非常数亚纯函数,$a_1,a_2,a_3,\cdots a_q$ 是 $q>2$ 个互异的扩充复平面$\overline{\mathbb{C}}$ 上的复数,那么有

$$(q-2)T(r,f)<\sum_{v=1}^{q}\overline{N}\left(r,\frac{1}{f-a_v}\right)-N_1(r)+S(r,f),$$

式中,$N_1(r)=2N(r,f)-N(r,f')+N\left(r,\dfrac{1}{f'}\right)$,$S(r,f)=o(T(r,f))$,$r\to\infty$ 对于至多除去一个测度为有穷的集合 E 外成立.

引理 4[10]　设 $f(z)$ 是复平面$\mathbb{C}$ 上的非常数亚纯函数,$a,b\neq0$ 是 2 个互异的复平面$\mathbb{C}$ 上的复数,k 是一个正整数,那么有

$$T(r,f)<\left(2+\frac{1}{k}\right)N\left(r,\frac{1}{f-a}\right)+\left(2+\frac{2}{k}\right)\overline{N}\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-b}\right)+S(r,f),$$

式中,$S(r,f)=o(T(r,f))$,$r\to\infty$ 对于至多除去一个测度为有穷的集合 E 外成立.

3 定理的证明

3.1 定理 3 的证明

证明　假设 $f(z)$ 不是正规函数,由引理 1,存在点列 $z_n\in\Delta$,正数列 $\rho_n\to0$ 使得 $g_n(\zeta)=f(z_n+\rho_n\zeta)$ 按球面距离内闭一致收敛到非常数亚纯函数 $g(\zeta)$.

可以断言:$g(\zeta)=0\Rightarrow g'(\zeta)=0$.

假设存在 $\zeta_0\in\mathbb{C}$ 使得 $g(\zeta_0)=0$,那么由于 $g(\zeta)$ 不恒等于 0,根据 Hurwitz 定理得,存在 $\zeta_n,\zeta_n\to\zeta_0$,使得

$$g_n(\zeta_n)=f(z_n+\rho_n\zeta_n)=0.$$

由条件(3),存在正数 M,使得 $f(z)=0\Rightarrow|f'(z)|\leqslant M$ 可知,

$$|g_n'(\zeta_n)|=|f'(z_n+\rho_n\zeta_n)|\leqslant M.$$

从而

$$g'(\zeta_0)=\lim_{n\to\infty}\rho_n f'(z_n+\rho_n\zeta_n)=0,$$

即 $g(\zeta)$ 的零点均为重级零点,由 $a_1a_2\neq0$ 和 Nevanlinna 第二基本定理即引理 3 知,g 必定可以取到 $S_1=\{a_1,a_2\}$ 中的某个数,不妨设 $g(\zeta)-a_1$ 在$\mathbb{C}$ 上有零点. 考虑函数

$$G_n(\zeta)=\frac{g_n(\zeta)-a_1}{\rho_n^k},$$

则有 $\{G_n\}$ 在 $g(\zeta)-a_1$ 的零点处不正规.

事实上,如果设 ζ_0 是 $g(\zeta)-a_1$ 的某个零点,那么由于 $g(\zeta)-a_1$ 不恒等于 0,故由 Hurwitz 定理存在一列 $\zeta_n,\zeta_n\to\zeta_0$,使得 $g_n(\zeta_n)=f(z_n+\rho_n\zeta_n)=a_1$,从而 $G_n(\zeta_n)=0$,即有 $\lim\limits_{n\to\infty}G_n(\zeta_n)=0$. 然而,又存在一个正数 δ,使得在 $0<|\zeta-\zeta_0|<\delta$ 上,$g(\zeta)\neq a_1$,那么对于任意的 ζ,只要 $0<|\zeta-\zeta_0|<\delta$,就存在 ζ 的一个闭邻域 $\overline{O(\zeta)}\subseteq$

$\{\zeta\in\mathbb{C}\ |0<|\zeta-\zeta_0|<\delta\}$,使得 n 充分大时,就有

$$|g_n(\zeta)-a_1|\geqslant|g(\zeta)-a_1|-|g_n(\zeta)-g(\zeta)|>\delta/2>0,$$

式中,$\delta=\min\limits_{\zeta\in O(\zeta)}|g(\zeta)-a_1|>0$,这样就有 $\lim\limits_{n\to\infty}G_n(\zeta)=\infty$,即有 $\{G_n\}$ 在点 ζ_0 处不正规.

若 $G_n(\zeta)=\dfrac{g_n(\zeta)-a_1}{\rho_n^k}=\dfrac{f(z_n+\rho_n\zeta)-a_1}{\rho_n^k}=0(f(z_n+\rho_n\zeta)-a_1=0)$,则 ζ 至少为 k 重零点且

$$|G_n^{(k)}(\zeta)|\leqslant A=\max\{|b_1|+|b_2|+k+1\},(G_n^{(k)}(\zeta)=f^{(k)}(z_n+\rho_n\zeta)\in S_2),$$

由于 $\{G_n\}$ 在点 ζ_0 处不正规,由 Zalcman-Pang 引理即引理 2,存在

(1)复数列 $\zeta_n,\zeta_n\to\zeta_0$;(2)正数列 $\eta_n\to0^+$;(3)函数列 G_n,使得 $F_n(\xi)=\dfrac{G_n(\zeta_n+\eta_n\xi)}{\eta_n^k}=\dfrac{g_n(\zeta_n+\eta_n\xi)-a_1}{\rho_n^k\eta_n^k}\to$ $F(\xi)$ 在$\mathbb{C}$ 上按球面距离内闭一致收敛,这里 $F(\xi)$ 是$\mathbb{C}$ 上的非常数有穷级亚纯函数,零点重级至少为 k,且 $F^{\#}(\xi)=\dfrac{|F'(\xi)|}{1+|F(\xi)|^2}\leqslant F^{\#}(0)=kA+1.$

可以断言:

(i)$F(\xi)$ 仅有有限多个不同的零点;

(ii)$F(\xi)=0\Leftrightarrow F^{(k)}(\xi)\in S_2=\{b_1,b_2\}$.

事实上,假设 ζ_0 是 $g(\zeta)-a_1$ 的一个 k 级零点,如果至少存在 $k+1$ 个互不相同的点 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{k+1}$,使得 $F(\xi_j)=0,j=1,2,\cdots,k+1$. 因为 $F(\xi)$ 不恒等于 0,所以由 Hurwitz 定理,存在一个正整数 N,使得对于任意的 $n>N$,有 $F_n(\xi_{n_j})=0,j=1,2,\cdots,k+1$. 那么 $g_n(\zeta_n+\eta_n\xi_{n_j})-a_1=0$,且 $\zeta_n+\eta_n\xi_{n_j}\to\zeta_0$,当 $n\to\infty$ 时,$j=1,2,\cdots,k+1$. 故有 ζ_0 是 $g(\zeta)-a_1$ 的重级至少为 $k+1$ 的零点,与假设矛盾. 故(i)成立.

下面给出(ii)的证明. 如果存在 $\xi_0\in\mathbb{C}$,使得 $F(\xi_0)=0$,由于 $F(\xi)$ 不恒等于 0,根据 Hurwitz 定理可得,存在一列 $\xi_n,\xi_n\to\xi_0$,使得

$$F_n(\xi_n)=\frac{f(z_n+\rho_n(\zeta_n+\eta_n\xi_n))-a_1}{\rho_n^k\eta_n^k}=0.$$

这表明 $f(z_n+\rho_n(\zeta_n+\eta_n\xi_n))=a_1$,由已知条件有 $f^{(k)}(z_n+\rho_n(\zeta_n+\eta_n\xi_n))\in S_2$. 可取 $f^{(k)}(z_n+\rho_n(\zeta_n+\eta_n\xi_n))$ 的子列(不妨仍记为 $f^{(k)}(z_n+\rho_n(\zeta_n+\eta_n\xi_n))\in S_2$)使得

$$f^{(k)}(z_n+\rho_n(\zeta_n+\eta_n\xi_n))=b_i,$$

则有 $F^{(k)}(\xi_0)=\lim\limits_{n\to\infty}F_n^{(k)}(\xi_n)=\lim\limits_{n\to\infty}f^{(k)}(z_n+\rho_n(\zeta_n+\eta_n\xi_n))\in S_2$.

另一方面,如果存在某个 $\xi_0\in\mathbb{C}$,使得 $F^{(k)}(\xi_0)\in S_2$,即存在某个 $b_i\in S_2$,使得 $F^{(k)}(\xi_0)=b_i$.

如果 $F^{(k)}(\xi)\equiv b_i$,则 $F(\xi)$ 是一个多项式,由 $F(\xi)$ 的零点重数至少为 k,可设 $F(\xi)=\dfrac{b_i}{k!}(\xi-\xi_0)^k$,下面计算 $F^{\#}(0)$.

$$F^{\#}(0)=\frac{|F'(0)|}{1+|F(0)|^2}=\frac{\dfrac{|b_i|}{(k-1)!}|\xi_0|^{k-1}}{1+\dfrac{|b_i|^2}{(k!)^2}|\xi_0|^{2k}}\leqslant\begin{cases}\dfrac{\dfrac{|b_i|}{(k-1)!}|\xi_0|^{k-1}}{1}<|b_i|, & |\xi_0|<1\\[2ex] \dfrac{\dfrac{|b_i|}{(k-1)!}|\xi_0|^{k-1}}{2\dfrac{|b_i|}{(k!)}|\xi_0|^{k}}\leqslant\dfrac{k}{2}, & |\xi_0|\geqslant1\end{cases}<|b_1|+|b_2|+\frac{k}{2}$$

上面不等式的证明过程假设了 $b_i\neq0$,若 $b_i=0$ 时,则 $F^{\#}(0)=0$,不等式显然成立.

这与 $F^{\#}(0)=kA+1$ 矛盾.

如果 $F^{(k)}(\xi)$ 不恒等于 b_i,由 Hurwitz 定理可得,存在一列 $\xi_n,\xi_n\to\xi_0$,使得

$$F_n^{(k)}(\xi_n)=f^{(k)}(z_n+\rho_n(\zeta_n+\eta_n\xi_n))=b_i,$$

则有 $f(z_n+\rho_n(\zeta_n+\eta_n\xi_n))\in S_1$.

如果存在无穷多个 n 使得

$$f(z_n+\rho_n(\zeta_n+\eta_n\xi_n))\neq a_1,$$

则

$$F(\xi_0)=\lim_{n\to\infty}\frac{f(z_n+\rho_n(\zeta_n+\eta_n\xi_n))-a_1}{\rho_n^k\eta_n^k}=\infty,$$

这与 $F^{(k)}(\xi_0)=b_i$ 矛盾.所以,存在一个正整数 N,使得对于每个 $n>N$,

$$f(z_n+\rho_n(\zeta_n+\eta_n\xi_n))=a_1,$$

则

$$F(\xi_0)=\lim_{n\to\infty}\frac{f(z_n+\rho_n(\zeta_n+\eta_n\xi_n))-a_1}{\rho_n^k\eta_n^k}=0.$$

下面对 $F(\xi)$ 使用 Hayman 不等式即引理 4,并注意到(ii)可得,

$$T(r,F(\xi))\leqslant\left(2+\frac{1}{k}\right)N\left(r,\frac{1}{F(\xi)}\right)+\left(2+\frac{2}{k}\right)\overline{N}\left(r,\frac{1}{F^{(k)}(\xi)-b_i}\right)+S(r,F(\xi))=$$
$$\left(2+\frac{1}{k}\right)N\left(r,\frac{1}{F(\xi)}\right)+\left(2+\frac{2}{k}\right)\overline{N}\left(r,\frac{1}{F(\xi)}\right)+S(r,F(\xi)).$$

因为 $F(\xi)$ 是非常值的有穷级亚纯函数,故有

$$S(r,F(\xi))=O(\ln r).$$

此外,$F(\xi)$ 仅有有限多个零点,那么 $\overline{N}\left(r,\frac{1}{F(\xi)}\right)=O(\ln r)$,因此即有

$$T(r,F(\xi))<O(\ln r),$$

这就意味着 $F(\xi)$ 是有理函数.

再断言:$F(\xi)$ 是一个多项式.

因为 ζ_0 是 $g(\zeta)-a_1$ 的零点,所以 $g_n(\zeta)-a_1$ 和 $G_n=\frac{g_n(\zeta)-a_1}{\rho_n^k}$ 在 ζ_0 的某个邻域内全纯(只要 n 充分大就可以),这就意味着 $F_n(\xi)=\frac{G_n(\zeta_n+\eta_n\xi)}{\eta_n}$ 在半径 R 趋向于无穷的圆盘 $D_R=\{\xi:|\xi|<R\}$ 内全纯. 所以$F_n(\xi)$ 在$\mathbb{C}$ 上按照球面距离内闭一致收敛到$\mathbb{C}$ 上的全纯函数 $F(\xi)$,则 $F(\xi)$ 是一个多项式,断言成立.

设 $F(\xi)=c_0\xi^p+c_1\xi^{p-1}+\cdots c_p$,其中 $c_i(i=0,1,2,\cdots,p)$ 是复数且 $c_0\neq0$.

情形 1　$k\geqslant p$,则 $F^{(k)}(\xi)\equiv\mathrm{const}$(常数),如果 $\mathrm{const}\in S_2$,由(ii)得,$F(\xi)\equiv0$,矛盾;如果 $\mathrm{const}\notin S_2$,由(ii)得,$F(\xi)\neq0$,也发生矛盾.

情形 2　$k<p$,令

$$A(\xi)=\frac{F(\xi)F^{(k+1)}(\xi)}{(F^{(k)}(\xi)-b_1)(F^{(k)}(\xi)-b_2)}.$$

由 $k<p$ 知 $F^{(k)}(\xi)$ 不为常数,那么 $A(\xi)$ 是一个不恒为零的多项式.

当 $\xi\to\infty$ 时,有 $F(\xi)=c_0\xi^p[1+o(1)]$.

注意到存在常数 d_1,d_2 使得

$$\frac{1}{(F^{(k)}(\xi)-b_1)(F^{(k)}(\xi)-b_2)}=\frac{d_1}{F^{(k)}(\xi)-b_1}+\frac{d_2}{F^{(k)}(\xi)-b_2},$$

则

$$A(\xi)=F(\xi)\left[\frac{d_1F^{(k+1)}(\xi)}{F^{(k)}(\xi)-b_1}+\frac{d_2F^{(k+1)}(\xi)}{F^{(k)}(\xi)-b_2}\right]=c\xi^p[1+o(1)]O(\xi^{-1})=O(\xi^{p-1}),$$

$\xi\to\infty$,其中 $c\neq0$ 为常数.

由于 $A(\xi)$ 为多项式,那么 $p\geqslant1$.

情形 2.1　如果 $p=1$,那么 $F^{(k+1)}(\xi)\equiv0$,$A(\xi)\equiv0$,与 $A(\xi)$ 不恒为零矛盾.

情形 2.2　如果 $p\geqslant2$,则

$$F^{(k)}(\xi)=cp(p-1)\cdots(p-k+1)\xi^{p-k}[1+o(1)],$$
$$F^{(k+1)}(\xi)=cp(p-1)\cdots(p-k+1)(p-k)\xi^{p-k-1}[1+o(1)].$$

那么,

$$A(\xi)=\frac{c_0cp(p-1)\cdots(p-k+1)(p-k)\xi^{2p-k-1}[1+o(1)]}{c^2p^2(p-1)^2\cdots(p-k+1)^2\xi^{2p-2k}[1+o(1)]}=O(\xi^{k-1}).$$

则当 $\xi\to\infty$ 时,$A(\xi)=O(\xi^{k-1})=O(\xi^{p-1})$,与 $k<p$ 矛盾.

3.2 定理 1 的证明

证明 假设 $f(z)$ 不是正规函数,由引理 1,存在点列 $z_n\in\Delta$,正数列 $\rho_n\to0$ 使得 $g_n(\zeta)=f(z_n+\rho_n\zeta)$ 按球面距离内闭一致收敛到非常数亚纯函数 $g(\zeta)$.

由 Picard 定理或引理 3 知,g 必定可以取到 $S_1=\{a_1,a_2,a_3\}$ 中的某个数,不妨设 $g(\zeta)-a_1$ 在 $\mathbb{C}$ 上有零点. 考虑函数

$$G_n(\zeta)=\frac{g_n(\zeta)-a_1}{\rho_n^k}.$$

可以断言:$\{G_n\}$ 在 $g(\zeta)-a_1$ 的零点处不正规,断言的证明完全类似于定理 3 的过程.

若 $G_n(\zeta)=\dfrac{g_n(\zeta)-a_1}{\rho_n^k}=\dfrac{f(z_n+\rho_n\zeta)-a_1}{\rho_n^k}=0(f(z_n+\rho_n\zeta)-a_1=0)$,则 ζ 至少为 k 重零点且 $|G_n^{(k)}(\zeta)|\leqslant A=\max\{|b_1|+|b_2|+|b_3|+k+1\}$,$(G_n^{(k)}(\zeta)=f^{(k)}(z_n+\rho_n\zeta)\in S_2)$,由于 $\{G_n\}$ 在点 ζ_0 处不正规,由引理 2,存在

(1)复数列 $\zeta_n,\zeta_n\to\zeta_0$;(2)正数列 $\eta_n\to0^+$;(3)函数列 G_n,使得 $F_n(\xi)=\dfrac{G_n(\zeta_n+\eta_n\xi)}{\eta_n^k}=\dfrac{g_n(\zeta_n+\eta_n\xi)-a_1}{\rho_n^k\eta_n^k}\to F(\xi)$ 在 $\mathbb{C}$ 上按球面距离内闭一致收敛,这里 $F(\xi)$ 是 $\mathbb{C}$ 上的非常数有穷级亚纯函数,零点重级至少为 k,且 $F^{\#}(\xi)=\dfrac{|F'(\xi)|}{1+|F(\xi)|^2}\leqslant F^{\#}(0)=kA+1$.

可以断言:

(i)$F(\xi)$ 是一个多项式;

(ii)$F(\xi)=0\Leftrightarrow F^{(k)}(\xi)\in S_2=\{b_1,b_2\}$.

断言的证明完全类似于定理 3 的过程.

设 $F(\xi)=c_0\xi^p+c_1\xi^{p-1}+\cdots c_p$,其中 $c_i(i=0,1,2,\cdots,p)$ 是复数且 $c_0\neq0$.

情形 1 $k\geqslant p$,产生矛盾,证明完全类似于定理 3 的过程.

情形 2 $k<p$,令

$$A(\xi)=\frac{F(\xi)F^{(k+1)}(\xi)}{(F^{(k)}(\xi)-b_1)(F^{(k)}(\xi)-b_2)(F^{(k)}(\xi)-b_3)}.$$

由 $k<p$ 知 $F^{(k)}(\xi)$ 不为常数,那么 $A(\xi)$ 是一个不恒为零的多项式.

当 $\xi\to\infty$ 时,有 $F(\xi)=c_0\xi^p[1+o(1)]$.

注意到存在常数 d_1,d_2,d_3,使得

$$\frac{1}{(F^{(k)}(\xi)-b_1)(F^{(k)}(\xi)-b_2)(F^{(k)}(\xi)-b_3)}=\frac{d_1}{F^{(k)}(\xi)-b_1}+\frac{d_2}{F^{(k)}(\xi)-b_2}+\frac{d_3}{F^{(k)}(\xi)-b_3}.$$

则

$$A(\xi)=F(\xi)\left[\frac{d_1F^{(k+1)}(\xi)}{F^{(k)}(\xi)-b_1}+\frac{d_2F^{(k+1)}(\xi)}{F^{(k)}(\xi)-b_2}+\frac{d_3F^{(k+1)}(\xi)}{F^{(k)}(\xi)-b_3}\right]=c\xi^p[1+o(1)]O(\xi^{-1})=O(\xi^{p-1}),\xi\to\infty,$$

其中,$c\neq0$ 为常数.

由于 $A(\xi)$ 为多项式,那么 $p\geqslant1$.

情形 2.1 如果 $p=1$,那么 $F^{(k+1)}(\xi)\equiv0$,$A(\xi)\equiv0$,与 $A(\xi)$ 不恒为零矛盾.

情形 2.2 如果 $p\geqslant2$,则

$$F^{(k)}(\xi)=cp(p-1)\cdots(p-k+1)\xi^{p-k}[1+o(1)],$$
$$F^{(k+1)}(\xi)=cp(p-1)\cdots(p-k+1)(p-k)\xi^{p-k-1}[1+o(1)],$$

那么,

$$A(\xi)=\frac{c_0cp(p-1)\cdots(p-k+1)(p-k)\xi^{2p-k-1}[1+o(1)]}{c^3p^3(p-1)^3\cdots(p-k+1)^3\xi^{3p-3k}[1+o(1)]}=O(\xi^{k-1-(p-k)}).$$

则当 $\xi\to\infty$ 时,$A(\xi)=O(\xi^{k-1-(p-k)})=O(\xi^{p-1})$,与 $k-1-(p-k)<p-1$ 矛盾.

定理 2 的证明完全类似定理 3 和定理 1 的证明.

致谢:感谢审稿人的宝贵意见.

[参考文献]

[1] STEINME T Z N. Nevanlinna theory,normal family,and algebraic differential equation[M]. Berlin:Springer Press,2017.
[2] HAYMAN W K,STORVICK D A. On normal functions[J]. Bull London Math Soc,1971,3:193-194.
[3] GU Y X. A normal criterion of families of meromorphic function[J]. Chinese science,1979(S1):269-276.
[4] LIU X J,PANG X C. Shared values and normal families[J]. Acta Math Sinica,2007,50(2):409-412.
[5] CHANG J M,WANG Y F. Shared values,Picard values and normality[J]. Tohoku Math J,2011,63:149-162.
[6] XU Y,QIU H L. Normal functions and shared sets[J]. Filomat,2016,30(2):287-292.
[7] LOHWATER A J,POMMERENKE CH. On normal meromorphic functions[J]. Ann Acad Sci Fenn Ser A I Math,1973,550:12.
[8] PANG X C,ZALCMAN L. Normal families and shared values[J]. Bull London Math Soc,2000,32:325-331.
[9] ZALCMAN L. Normal families:new perspectives[J]. Bull Math Soc,1998,35:215-230.
[10] YANG L. Value distribution theory[M]. Berlin:Springer-Verlag and Science Press,1993.

[责任编辑:陆炳新]