doi:10.3969/j.issn.1001-4616.2019.01.002

高阶无穷多点半正边值问题正解的存在性

沈文国[1],孙建仁[2]

(1.兰州工业学院基础学科部,甘肃 兰州 730050)
(2.兰州工业学院机电工程学院,甘肃 兰州 730050)

[摘要] 研究二阶无穷多点半正边值问题:$x^{(n)}(t)+\lambda f(t,x(t))=0,0<t<1,x(0)=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i x(\xi_i),x'(0)=\cdots=x^{(n-2)}(0)=0,x(1)=\sum_{i=1}^{\infty}\beta_i x(\eta_i)$ 正解的存在性问题.其中 $\xi_i,\eta_i\in(0,1)(i=1,2,\cdots),1>\xi_1>\xi_2>\cdots>\xi_n>\cdots>0$,$0<\eta_1<\eta_2<\cdots<\eta_n<\cdots<1,\alpha_i,\beta_i\in(0,\infty),0<\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i(1-\xi_i^{n-1})<1,0<\sum_{i=1}^{\infty}\beta_i\eta_i^{n-1}<1$ 且 $D_\infty=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\xi_i^{n-1}\left(1-\sum_{i=1}^{\infty}\beta_i\right)+\left(1-\sum_{i=1}^{\infty}\beta_i\eta_i^{n-1}\right)\left(1-\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\right)>0$. 我们给正参数 λ 和函数 $f(t,x(t))$ 赋予一定的条件,使得上述问题至少存在一个正解.本文应用锥上不动点定理来证明主要定理.

[关键词] n 阶无穷多点半正边值问题,格林函数,正解,推广的锥上不动点定理
[中图分类号]O175 [文献标志码]A [文章编号]1001-4616(2019)01-0006-08

Existence of Positive Solutions for Semi-Positone n Order ∞-Point Boundary Value Problem

Shen Wenguo[1],Sun Jianren[2]

(1.Department of Basic Courses,Lanzhou Institute of Technology,Lanzhou 730050,China)
(2.College of Mechano-Electronic Engineering,Lanzhou Institute of Technology,Lanzhou 730050,China)

Abstract:In this paper,we study the existence of positive solutions for semi-positone n order ∞-point boundary value problem $x^{(n)}(t)+\lambda f(t,x(t))=0,0<t<1,x(0)=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i x(\xi_i),x'(0)=\cdots=x^{(n-2)}(0)=0,x(1)=\sum_{i=1}^{\infty}\beta_i x(\eta_i)$,where $\xi_i,\eta_i\in(0,1)(i=1,2,\cdots)$,satisfing $1>\xi_1>\xi_2>\cdots>\xi_n>\cdots>0,0<\eta_1<\eta_2<\cdots<\eta_n<\cdots<1,\alpha_i,\beta_i\in(0,\infty)$ satisfing $0<\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i(1-\xi_i^{n-1})<1,0<\sum_{i=1}^{\infty}\beta_i\eta_i^{n-1}<1$,and $D_\infty=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\xi_i^{n-1}(1-\sum_{i=1}^{\infty}\beta_i)+(1-\sum_{i=1}^{\infty}\beta_i\eta_i^{n-1})(1-\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i)>0$. We study the existence of positive solutions for the above problem. The proof of our main result is based upon a fixed point theorem in cones.

Key words:n-order ∞-point semi-positone boundary value problem,Green function,positive solutions,fixed point theorem in cones

关于高阶多点边值问题正解的存在性问题,已有很多学者做了研究,参考文献[1-8].

对于多点半正边值问题正解的存在性问题,亦有很多学者做了研究,参考文献[9-14],其中,张[10]利用一个推广的锥上不动点定理研究了一类二阶三点半正边值问题正解的存在性问题,文[13]利用锥上不动点定理研究了下列二阶无穷多点半正边值问题正解的存在性问题:

$$\begin{cases}x''(t)+\lambda f(t,x(t))=0, \quad 0<t<1,\\ x(0)=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i x(\xi_i),x(1)=\sum_{i=1}^{\infty}\beta_i x(\eta_i).\end{cases} \tag{1}$$

收稿日期:2017-05-01.
基金项目:国家自然科学基金(11561038)、兰州工业学院'开物'科研创新团队支持计划资助(2018KW-03).
通讯联系人:沈文国,教授,博士,研究方向:非线性微分方程. E-mail:shenwg369@163.com

然而,目前为止,还没有学者研究关于高阶无穷多点半正边值问题正解的存在性问题.

受文献[10,13]的启发,本文研究下列关于高阶无穷多点半正边值问题正解的存在性问题

$$\begin{cases} x^{(n)}(t)+\lambda f(t,x(t))=0, \quad 0<t<1, \\ x(0)=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i x(\xi_i), x'(0)=\cdots=x^{(n-2)}(0)=0, x(1)=\sum_{i=1}^{\infty}\beta_i x(\eta_i) \end{cases} \tag{2}$$

正解的存在性问题. 本文假设:

(H_1) $\xi_i,\eta_i\in(0,1)(i=1,2,\cdots)$, $1>\xi_1>\xi_2>\cdots>\xi_n>\cdots>0$,

$0<\eta_1<\eta_2<\cdots<\eta_n<\cdots<1$, $\alpha_i,\beta_i\in(0,\infty)(i=1,2,\cdots)$, $0<\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i(1-\xi_i^{n-1})<1$,

$0<\sum_{i=1}^{\infty}\beta_i\eta_i^{n-1}<1$ 且 $D_\infty=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\xi_i^{n-1}\left(1-\sum_{i=1}^{\infty}\beta_i\right)+\left(1-\sum_{i=1}^{\infty}\beta_i\eta_i^{n-1}\right)\left(1-\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\right)>0.$

注 1 由(H_1)可得

$$0<\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\xi_i^{n-1}<\infty, 0<\sum_{i=1}^{\infty}\beta_i(1-\eta_i^{n-1})<\infty. \tag{3}$$

事实上,易得 $0<\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\xi_i^{n-1}=\sum_{i=1}^{\infty}\dfrac{\alpha_i\xi_i^{n-1}(1-\xi_i^{n-1})}{1-\xi_i^{n-1}}<\dfrac{\xi_1^{n-1}}{1-\xi_1^{n-1}}\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i(1-\xi_i^{n-1})<\infty$,

$0<\sum_{i=1}^{\infty}\beta_i(1-\eta_i^{n-1})=\sum_{i=1}^{\infty}\dfrac{\beta_i(1-\eta_i^{n-1})\eta_i^{n-1}}{\eta_i^{n-1}}<\dfrac{1-\eta_1^{n-1}}{\eta_1^{n-1}}\sum_{i=1}^{\infty}\beta_i\eta_i^{n-1}<\infty$.

为了证明本文的主要结论,我们给出如下推广的锥上不动点定理.

定义 1[16] 设 E 是实 Banach 空间且 P 是 E 上一个锥,如果 $\rho:P\to R^1$ 连续,并且对所有 $x,y\in\rho$ 和 $0\leqslant t\leqslant1$,下式成立

$$\rho(tx+(1-t)y)\leqslant t\rho(x)+(1-t)\rho(y),$$

则称 ρ 是 P 上的连续凸泛函.

定理 1[16] 设 E 是一个实 Banach 空间,$P\subset E$ 是一个锥,θ 表示 E 上的零元素,Ω_1、Ω_2 是 E 中的有界开集且 $\theta\in\Omega_1$,$\bar{\Omega}_1\subset\Omega_2$. 设 $A:P\cap(\bar{\Omega}_2\backslash\Omega_1)\to P$ 是一个全连续算子,$\rho:P\to[0,\infty)$ 是一个一致连续凸泛函,并且 $\rho(\theta)=0$,$\rho(x)>0$,$x\neq\theta$. 假设下列条件之一成立

(i) $\rho(Ax)\leqslant\rho(x)$, $\forall x\in P\cap\partial\Omega_1$ 和 $\inf\limits_{x\in P\cap\partial\Omega_2}\rho(x)>0$, $\rho(Ax)\geqslant\rho(x)$, $\forall x\in P\cap\partial\Omega_2$,

(ii) $\inf\limits_{x\in P\cap\partial\Omega_1}\rho(x)>0$, $\rho(Ax)\geqslant\rho(x)$, $\forall x\in P\cap\partial\Omega_1$, $\rho(Ax)\leqslant\rho(x)$, $\forall x\in P\cap\partial\Omega_2$,

则 A 在 $P\cap(\bar{\Omega}_2\backslash\Omega_1)$上存在一个不动点.

1 预备知识

给实 Banach 空间 $C[0,1]$和 $C^n[0,1]$分别赋予范数 $\|u\|=\max\limits_{t\in[0,1]}|u(t)|$和 $\|u\|_n=\max\{\|u\|,\|u'\|,\cdots,\|u^{(n)}\|\}$. 对任何 $m\in\mathbf{N}$,考虑如下边值问题

$$\begin{cases} x^{(n)}(t)+y(t)=0, \quad 0<t<1 \\ x(0)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i x(\xi_i), x'(0)=\cdots=x^{(n-2)}(0)=0, x(1)=\sum_{i=1}^{m}\beta_i x(\eta_i). \end{cases} \tag{4}$$

引理 1 设(H_1) 成立,对于 $y\in C[0,1]$,则边值问题(4)有唯一解

$$x(t)=\int_0^1 G(t,s)y(s)\,\mathrm{d}s \tag{5}$$

式中

$$G(t,s)=g(t,s)+\frac{\left(1-\sum_{i=1}^{m}\beta_i\eta_i^{n-1}\right)-\left(1-\sum_{i=1}^{m}\beta_i\right)t^{n-1}}{D_m}\sum_{i=1}^{m}\alpha_i g(\xi_i,s)+$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\xi_i^{n-1}+\left(1-\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\right)t^{n-1}}{D_m}\sum_{i=1}^{m}\beta_i g(\eta_i,s),\tag{6}$$

$$g(t,s)=\frac{1}{(n-1)!}\begin{cases}t^{n-1}(1-s)^{n-1}-(t-s)^{n-1}, & 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1,\\ t^{n-1}(1-s)^{n-1}, & 0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1,\end{cases}\tag{7}$$

$$D_m=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\xi_i^{n-1}\left(1-\sum_{i=1}^{m}\beta_i\right)+\left(1-\sum_{i=1}^{m}\beta_i\eta_i^{n-1}\right)\left(1-\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\right)>0.\tag{8}$$

证明　应用与文献[2,引理 3.1]或者[3,引理 4.1,引理 4.2]或者[5,定理 2.1]相似的方法可证明本引理,故证明略.

引理 2[8]　由式(7)定义的 $g(t,s)$ 满足下列性质

$$c(t)g(\tau(s),s)\leqslant g(t,s)\leqslant g(\tau(s),s),\ \forall t,s\in[0,1],$$

式中,$\tau(s)=\dfrac{s}{1-(1-s)^{\frac{n-1}{n-2}}}$,$g(\tau(s),s)=\dfrac{\tau(s)^{n-2}s(1-s)^{n-1}}{(n-1)!}$,$c(t)=\min\left\{\dfrac{(n-1)^{n-1}t^{n-2}(1-t)}{(n-2)^{n-2}},t^{n-1}\right\}$.

引理 3　设(H1)成立. 由式(6)定义的 $G(t,s)$ 满足下列性质

(1) $G(t,s)$ 在 $[0,1]\times[0,1]$ 上连续且 $G(t,s)\geqslant 0$;

(2)对于任意 $t,s\in[0,1]$ 都有 $G(t,s)\leqslant G(s)$ 成立. 对于任意 $t,s\in[0,1]$,存在一个常数 γ 使得下式成立

$$G(t,s)\geqslant\gamma G(s),$$

式中,$G(s)=\dfrac{D_\infty+M_1+M_2}{D_\infty}$,$\gamma=\dfrac{(m_1+m_2)D_\infty}{(D_\infty+M_1+M_2)}$,$m_1=\min\left\{1-\sum_{i=1}^{\infty}\beta_i\eta_i^{n-1},\beta_1(1-\eta_1^{n-1})\right\}\cdot\alpha_1 c(\xi_1)$,

$m_2=\min\left\{\alpha_1\xi_1^{n-1},1-\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i(1-\xi_i^{n-1})\right\}\cdot\beta_1 c(\eta_1)$,$M_1=\dfrac{\max\left\{1-\beta_1\eta_1^{n-1},\sum_{i=1}^{\infty}\beta_i(1-\eta_i^{n-1})\right\}}{1-\xi_1}\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i(1-\xi_i^{n-1})$,

$M_2=\dfrac{\max\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\xi_i^{n-1},1-\alpha_1(1-\xi_1^{n-1})\right\}}{\eta_1}\cdot\sum_{i=1}^{\infty}\beta_i\eta_i^{n-1}$.

证明　应用与文献[13,引理 3]相似的方法可证明本引理,故证明略.

由引理 3 易得如下引理:

引理 4　设(H_1) 成立. 则对于 $y\in C[0,1]$ 和 $y\geqslant 0$,(4)的唯一解满足

(i) $x(t)\geqslant 0,\ \forall t\in[0,1]$;

(ii) $\min\limits_{t\in[0,1]}x(t)\geqslant\gamma\|x\|$,其中 γ 由引理 3(2)给出.

引理 5　设(H1)成立.则边值问题

$$\begin{cases}x^{(n)}(t)+1=0, & 0<t<1,\\ x(0)=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i x(\xi_i),x'(0)=\cdots=x^{(n-2)}(0)=0,x(1)=\sum_{i=1}^{\infty}\beta_i x(\eta_i)\end{cases}\tag{9}$$

存在唯一解

$$\tilde{\omega}(t)=\int_0^1 G(t,s)\,\mathrm{d}s,\ \forall t\in[0,1].\tag{10}$$

进而,存在一个正常数 c 使得 $\tilde{\omega}(t)\leqslant c\gamma,\ \forall t\in[0,1]$,其中 $c=\dfrac{\int_0^1 G(s)\,\mathrm{d}s}{\gamma}$.

注 2　由注 1 可得(H_1),应用与文献[13,引理 2]相似的方法可得:

$$0<\int_0^1 G(s)\,\mathrm{d}s<+\infty.$$

2　主要定理及证明

为了证明本节主要定理,假设如下条件成立

(H2)$f(\cdot,\cdot)\in C([0,1]\times[0,\infty),\mathbf{R})$ 存在 $M>0$,对于$(t,x)\in[0,1]\times[0,\infty)$使得 $f(t,x)\geqslant -M$.

(H3)存在两个常数 $a,b\in(0,\infty)$ 使得

$$0<f(t,x)\leqslant b,\ \forall(t,x)\in[0,1]\times[0,a].$$

(H4)设 $L=\min\{\gamma/2,a\}$,$M'=\max\{f(t,x)+M,0\leqslant t\leqslant 1,0\leqslant x\leqslant 2\}$.

参数 λ 满足

$$0<\lambda\leqslant\tau:=\frac{1}{c}\cdot\min\left\{\frac{\gamma}{M},\frac{2}{M'},\frac{L}{M''}\right\},$$

式中,γ 是引理 3(2)所给,$M''=\max\{f(t,x)\mid 0\leqslant t\leqslant 1,0\leqslant x\leqslant L\}$.

(H5)存在 $R>2$ 使得:对于 $t\in[0,1]$ 和 $x\geqslant\frac{1}{2}R\gamma^2$,使得 $f(t,x)+M\geqslant Nx$,其中,对固定的 $\lambda\in(0,\tau]$,使 $N\geqslant\frac{2}{\lambda\gamma^2}\int_0^1 G(s)\,\mathrm{d}s$ 成立.

注 3 由(H3)和 f 的连续性可得 $\lim_{y\to 0^+}\frac{f(t,y)}{y}=+\infty$ 对 $t\in[0,1]$一致成立.

定理 2 假设条件(H1)-(H5)成立. 则问题(2)至少有两个正解 x_1,x_2,满足 $|x_1|\geqslant\gamma$, $|x_2|\leqslant L\leqslant\frac{\gamma}{2}$.

证明 首先考虑

$$\begin{cases}x^{(n)}(t)+\lambda f(t,x(t))=0,\quad 0<t<1,\\ x(0)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i x(\xi_i),x'(0)=\cdots=x^{(n-2)}(0)=0,x(1)=\sum_{i=1}^{m}\beta_i x(\eta_i).\end{cases}\tag{11}$$

显然,当 $m\to+\infty$ 时,问题(11)可转化为(2).

设

$$P=\{x\mid x\in C[0,1],x(t)\geqslant 0,\forall t\in[0,1]:\min_{t\in[0,1]}x(t)\geqslant\gamma\|x\|\},$$

式中,γ 由引理 3(2)给出. 显然 P 是 $C[0,1]$中的一个正锥.

令 $\omega=\lambda M\tilde{\omega}$, 其中 $\tilde{\omega}$ 由(10)给出. 则(11)有一个正解 x 当且仅当 $x+\omega:=\bar{\omega}$ 是方程

$$\begin{cases}x^{(n)}(t)+\lambda h(t,x-\omega)=0,\quad 0<t<1,\\ x(0)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i x(\xi_i),x'(0)=\cdots=x^{(n-2)}(0)=0,x(1)=\sum_{i=1}^{m}\beta_i x(\eta_i)\end{cases}\tag{12}$$

的一个解. 且 $\bar{x}(t)>\omega(t)$, $\forall t\in[0,1]$. 其中 $h:[0,1]\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}^+$满足

$$h(t,x)=\begin{cases}f(t,x)+M,\ \forall(t,x)\in[0,1]\times[0,\infty),\\ f(t,0)+M,\ \forall(t,x)\in[0,1]\times(-\infty,0].\end{cases}$$

对于 $x\in P$,Ax 是(12)的唯一解,则

$$Ax(t)=\lambda\int_0^1 G(t,s)h(s,x(s)-\omega(s))\,\mathrm{d}s.$$

由引理 4 可知 $AP\subset P$. 由 Ascoli-Arzela 定理,易知 $A:P\to P$ 是全连续算子.

设 $\rho(x)=\max_{t\in[0,1]}x(t)$, 易得 $\rho:P\to[0,+\infty)$是一直连续凸泛函且 $\rho(\theta)=0$ 和 $\rho(x)>0,\forall x\neq 0$ 成立.

设 $\Omega_1=\{x\in C[0,1]\mid\rho(x)<2\gamma\}$,$\Omega_2=\{x\in C[0,1]\mid\rho(x)<R\gamma\}$,显然 Ω_1,Ω_2 是 $C[0,1]$中的开集,并且 $\theta\in\Omega_1$ 和 $\bar{\Omega}_1\subset\Omega_2$.

假设 $x\in P\cap\partial\Omega_1$,则有

$$x\leqslant\frac{1}{\gamma}\min_{t\in[0,1]}x(t)\leqslant\frac{1}{\gamma}\max_{t\in[0,1]}x(t)=\frac{1}{\gamma}\rho(x)<2,$$

即 $P\cap\Omega_1$有界,同理可知 $P\cap\Omega_2$ 有界.

假设 $x\in P\cap\partial\Omega_1$,则 $\rho(x)=2\gamma$, $|x|\leqslant 2$. 因此,由引理 5 和(H4)可得

$$\rho(Ax)=\max_{t\in[0,1]}Ax(t)=\max_{t\in[0,1]}\lambda\int_0^1 G(t,s)[h(s,x(s))-\omega(s)]\,\mathrm{d}s\leqslant\lambda\int_0^1 G(s)\,\mathrm{d}s\cdot M'\leqslant\lambda CM'\cdot\gamma\leqslant 2\gamma,$$

即

$$\rho(Ax)\leqslant\rho(x),\ \forall x\in P\cap\partial\Omega_1.$$

假设 $x\in P\cap\partial\Omega_2$,则 $\rho(x)=R\gamma$,因此 $R\gamma\leqslant\|x\|\leqslant R$. 因此,对于 $x\in P\cap\partial\Omega_2$, 可得 $\inf_{x\in P\cap\partial\Omega_2}\rho(x)>0$,

$$\omega(s)=\lambda M\bar{\omega}(s)\leqslant\lambda Mc\gamma\leqslant\gamma^2\leqslant\gamma\frac{x(s)}{\|x\|}\leqslant\frac{1}{R}x(s),s\in[0,1].$$

因此

$$x(s)-\omega(s)\geqslant\left(1-\frac{1}{R}\right)x(s),s\in[0,1],$$

$$x(s)-\omega(s)\geqslant\frac{1}{2}x(s)\geqslant\frac{1}{2}\gamma\|x\|\geqslant\frac{1}{2}R\gamma^2,s\in[0,1],\tag{13}$$

结合(H5)可得

$$h(s,x(s)-\omega(s))=f(s,x(s)-\omega(s))+M\geqslant N(x(s)-\omega(s))\geqslant\frac{1}{2}R\gamma^2N,s\in[0,1],$$

因此,从(H5)可得

$$\rho(Ax)=\max_{t\in[\delta,1-\delta]}Ax(t)\geqslant Ax(1/2)=\lambda\int_0^1G(1/2,s)[h(s,x(s))-\omega(s)]\mathrm{d}s\geqslant\lambda\cdot\frac{1}{2}R\gamma^2N\cdot\gamma\int_0^1G(s)\mathrm{d}s\geqslant\gamma R=\rho(x).$$

即

$$\rho(Ax)\geqslant\rho(x),\ \forall x\in P\cap\partial\Omega_2.$$

进而,由定理 1(i)可知 A 有一个不动点 $\bar{x}\in P\cap\bar{\omega}_2\backslash\Omega_1$,使得

$$2\gamma\leqslant\rho(\bar{x})\leqslant\gamma R,2\gamma\leqslant\|\bar{x}\|\leqslant R,\tag{14}$$

从(14)和引理 5,可得

$$\bar{x}(t)\geqslant\gamma\|\bar{x}\|\geqslant2\gamma^2>2\lambda M\bar{\omega}=2\omega,t\in[0,1].\tag{15}$$

因此 $x_1=\bar{x}-\omega$ 是(12)的一个正解. 进而,从(14)和(15),可得

$$r_1=\gamma\leqslant\frac{1}{2}\|\bar{x}\|\leqslant x_1\leqslant R+\lambda Mc\gamma=R_1.\tag{16}$$

为了找到(11)的第二个解,设

$$f^*(t,x)=\begin{cases}f(t,x),(t,x)\in[0,1]\times[0,a],\\f(t,a),(t,x)\in[0,1]\times[a,\infty).\end{cases}\tag{17}$$

因此,对于 $(t,x)\in[0,1]\times[0,\infty)$,都有 $0<f^*(t,x)\leqslant b$.

考虑方程

$$\begin{cases}x^{(n)}(t)+\lambda f^*(t,x(t))=0,\quad 0<t<1,\\x(0)=\sum_{i=1}^m\alpha_ix(\xi_i),x'(0)=\cdots=x^{(n-2)}(0)=0,x(1)=\sum_{i=1}^m\beta_ix(\eta_i),\end{cases}\tag{18}$$

(18)等价于 $x(t)=Tx(t)$.

式中

$$Tx(t)=\lambda\int_0^1G(t,s)f^*(s,x(s))\mathrm{d}s.\tag{19}$$

显然 $T:P\to P$ 是一个全连续算子且 $TP\subset P$. 由注 3 可知

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f^*(t,x)}{x}=+\infty,$$

对 $t\in[0,1]$一致成立.

即存在一个常数 $r:r\leqslant L$ 使得:对于 $(t,x)\in[0,1]\times[0,r]$使得 $f^*(t,x)\geqslant\beta(x)$,

式中

$$\lambda\beta\gamma^2\int_0^1G(s)\mathrm{d}s\geqslant1.\tag{20}$$

设 $\Omega_3=\{x\in C[0,1]\mid\rho(x)<L\gamma\}$, $\Omega_4=\{x\in C[0,1]\mid\rho(x)<r\gamma\}$,

则 $P\cap\Omega_3$和 $P\cap\Omega_4$ 是 $C[0,1]$中两个开集 且 $\inf_{x\in P\cap\partial\Omega_4}\rho(x)>0$,

对于 $x\in P\cap\partial\Omega_3$,则 $\rho(x)=L\gamma$,因此

$$\|x\|\leqslant L.$$

由引理 5 和(H4)可得

$$\rho(Tx)=\max_{t\in[0,1]}Tx(t)=\max_{t\in[0,1]}\lambda\int_0^1 G(t,s)f^*(s,x(s))\,\mathrm{d}s\leqslant\lambda CM''\cdot\gamma\leqslant L\gamma=\rho(x),$$

即

$$\rho(Tx)\leqslant\rho(x),\ \forall x\in P\cap\partial\Omega_3.$$

进而,假设 $x\in P\cap\partial\Omega_4$,则 $r\gamma\leqslant\|x\|\leqslant r$ 结合(20),可得

$$\rho(Tx)=\max_{t\in[0,1]}Tx(t)\geqslant Tx(1/2)=\lambda\int_0^1 G(1/2,s)f^*(s,x(s))\,\mathrm{d}s\geqslant\lambda\cdot\beta\gamma^2\int_0^1 G(s)\,\mathrm{d}s\cdot\|x\|\geqslant r\gamma=\rho(x),$$

即 $\rho(Tx)\geqslant\rho(x)$, $\forall x\in P\cap\partial\Omega_4$. 由定理 1(ii)可知 A 有一个不动点,即(18)有一个正解 x_2 满足 $r\gamma\leqslant\rho(x_2)\leqslant L\gamma$. 因此,

$$r_2=r\gamma\leqslant\|x_2\|\leqslant L\leqslant\gamma/2=R_2. \tag{21}$$

由(H4)和(18)可得,x_2 亦是(11)的一个正解. 由(16)和(21)可知,(11)有两个不同的正解 x_1 和 x_2.

因此,对于 $l=1,2$,当 $m\to\infty$ 时,可得 一列解序列 $\{x_{lm}\}_{m=1}^{\infty}\subset C^n[0,1]$ 使得

$$\begin{cases}x_{lm}^{(n)}(t)+\lambda f(t,x_{lm}(t))=0,\quad 0<t<1,\\ x_{lm}(0)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i x_{lm}(\xi_i),x_{lm}(0)=\cdots=x_{lm}^{(n-2)}(0)=0,x_{lm}(1)=\sum_{i=1}^{m}\beta_i x_{lm}(\eta_i),\end{cases} \tag{22}$$

成立.

从上面证明可知:对于任何 $m\in\mathbf{N}$ 都有

$$r_l\leqslant\|x_{lm}\|\leqslant R_l,\ \forall t\in[0,1],l=1,2. \tag{23}$$

对于 $l=1,2$, 由(H3)和(22)可知,存在 $M_l>0$,成立

$$|x_{lm}^{(n)}|\leqslant M_l,\ \forall t\in[0,1],l=1,2. \tag{24}$$

式中,$M_l=\max\{\lambda f(t,(x_{lm}(t))):(t,x_{lm}(t))\in[0,1]\times[0,R_l]\}$.

从(23)可得 $\|x_{lm}(0)\|\leqslant R_l$, $\|x_{lm}(1)\|\leqslant R_l$, $l=1,2$. 因此,由拉格朗日中值定理可知,存在一个常数 $d_{l1}\in(0,1)$, $(l=1,2)$ 使得下式成立

$$|x'_{lm}(d_{l1})|=|x_{lm}(1)-x_{lm}(0)|\leqslant 2R_l. \tag{25}$$

相似地,由 $x'_{lm}(0)=0$ 和(25)可知:存在一个常数 $d_{l2}\in(0,d_{l1})$, $(l=1,2)$,使得

$$|x''_{lm}(d_{l2})|=\frac{|x'_{lm}(d_{l1})-x'_{lm}(0)|}{d_{l1}}\leqslant\frac{2R_l}{d_{l1}}.$$

继续这样一个过程,对于 $l=1,2$ 和 $i=3,\cdots,n-1$,由条件

$$x''_{lm}(0)=x'''_{lm}(0)=\cdots=x_{lm}^{(n-2)}(0)=0,$$

可知存在一个数列

$$1>d_{l1}>d_{l2}>\cdots>d_{l(n-1)}>0,$$

使得下式成立

$$|x_{lm}^{(i)}(d_{li})|=\frac{|x_{lm}^{(i-1)}(d_{l(i-1)})-x_{lm}^{(i-1)}(0)|}{d_{l(i-1)}\cdots d_{l2}d_{l1}}\leqslant\frac{2R_l}{d_{l(i-1)}\cdots d_{l2}d_{l1}}. \tag{26}$$

进而,对于 $l=1,2$,由(26),可得

$$|x_{lm}^{(n-1)}(d_{l(n-1)})|\leqslant\frac{2R_l}{d_{l(n-2)}\cdots d_{l2}d_{l1}}. \tag{27}$$

继续这样一个过程,对于 $l=1,2$,由(24)和(27)可得,

$$|x_{lm}^{(n-1)}(t)|=\left|\int_{d_{l(n-1)}}^{t}x_{lm}^{(n)}(s)\,\mathrm{d}s+x_{lm}^{(n-1)}(d_{l(n-1)})\right|\leqslant M_l+\frac{2R_l}{d_{l(n-2)}\cdots d_{l2}d_{l1}},\quad\forall t\in[0,1]. \tag{28}$$

相似的,对于 $l=1,2,i=2,3,\cdots,n-1,x_{lm}(0)=x_{lm}(0)\cdots=x_{lm}^{(n-2)}(0)=0$,

$$|x_{lm}^{(i)}(t)|=\left|\int_{d_{l(n-1)}}^{t}x_{lm}^{(i+1)}(s)\,\mathrm{d}s+x_{lm}^{(i)}(0)\right|\leqslant M_l+\frac{2R_l}{d_{l(n-2)}\cdots d_{l2}d_{l1}},\quad\forall t\in[0,1]. \tag{29}$$

因此,$\{x_{lm}\}_{m=1}^{\infty}(l=1,2)$ 是 $C^n[0,1]$ 上一致有界序列.

对于 $l=1,2$,由于 $C^n[0,1]\to\to C[0,1]$,则

$$\{x_{lm_{k_0}}\}_{k_0=1}^{\infty}\subseteq\{x_{lm}\}_{m=1}^{\infty},\tag{30}$$

并且 $\lim\limits_{k_0\to\infty}x_{lm_{k_0}}=x_{l0}\in C[0,1]$.

继续这样一个过程,对于 $l=1,2$ 和 $i=1,2,\cdots,n-2$, 由 $C^n[0,1]\to\to C^i[0,1]$,可得

$$\{x_{lm_{k_i}}\}_{k_i=1}^{\infty}\subseteq\{x_{lm_{k_{i-1}}}\}_{k_{i-1}=1}^{\infty}\subseteq\cdots\subseteq\{x_{lm_{k_0}}\}_{k_0=1}^{\infty}\subseteq\{x_{lm}\}_{m=1}^{\infty},\tag{31}$$

因此

$$\lim_{k_i\to\infty}x_{lm_{k_i}}(t)=x_{li}(t),\lim_{k_i\to\infty}x'_{lm_{k_i}}(t)=x'_{li}(t),\cdots\lim_{k_i\to\infty}x^{(i)}_{lm_{k_i^{(i)}}}(t)=x^{(i)}_{li}(t),\ \forall t\in C[0,1].\tag{32}$$

进而,对于 $l=1,2$,由(31),和(32),可知:存在

$$\{x_{lm_{k_{n-1}}}\}_{k_{n-1}=1}^{\infty}\subseteq\{x_{lm_{k_{n-2}}}\}_{k_{n-2}=1}^{\infty}\subseteq\cdots\subseteq\{x_{lm_{k_0}}\}_{k_0=1}^{\infty}\subseteq\{x_{lm}\}_{m=1}^{\infty}\tag{33}$$

和

$$\begin{cases}x^{(n)}_{lm_{k_{n-1}^{(n)}}}(t)+\lambda f^*(t,x_{lm_{k_{n-1}}}(t))=0,\quad 0<t<1,\\ x_{lm_{k_{n-1}}}(0)=\sum\limits_{i=1}^{m}\alpha_ix_{lm_{k_{n-1}}}(\xi_i),x'_{lm_{k_{n-1}}}(0)=\cdots=x^{(n-2)}_{lm_{k_{n-1}^{(n-2)}}}(0)=0,x_{lm_{k_{n-1}}}(1)=\sum\limits_{i=1}^{m}\beta_ix_{lm_{k_{n-1}}}(\eta_i),\end{cases}\tag{34}$$

使得

$$\begin{gathered}\lim_{k_{n-1}\to\infty}x_{lm_{k_{n-1}}}(t)=x_{l(n-1)}(t),\lim_{k_{n-1}\to\infty}x_{lm_{k_{n-1}}}(t)=x_{l(n-1)}(t),\\ \cdots\lim_{k_{n-1}\to\infty}x^{(n-1)}_{lm_{k_{n-1}}}(t)=x^{(n-1)}_{l(n-1)}(t),\ \forall t\in C[0,1].\end{gathered}\tag{35}$$

成立.

接下来证明,对于 $l=1,2$,$x_{l(n-1)}\in C^n[0,1]$ 且 $x_{l(n-1)}$ 满足(2). 因为

$$\begin{aligned}x_{lm_{k_{n-1}}}(t)=&\int_0^1g(t,s)f(s,x_{lm_{k_{n-1}}}(s))\mathrm{d}s+\frac{\left(1-\sum\limits_{i=1}^{m}\beta_i\eta_i^{n-1}\right)-\left(1-\sum\limits_{i=1}^{m}\beta_i\right)t^{n-1}}{D_m}\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\int_0^1g(\xi_i,s)f(s,x_{lm_{k_{n-1}}}(s))\mathrm{d}s+\\&\frac{\sum\limits_{i=1}^{m}\alpha_i\xi_i^{n-1}+\left(1-\sum\limits_{i=1}^{m}\alpha_i\right)t^{n-1}}{D_m}\sum_{i=1}^{m}\beta_i\int_0^1g(\eta_i,s)f(s,x_{lm_{k_{n-1}}}(s))\mathrm{d}s,\end{aligned}\tag{36}$$

令 $C:=\max\{g(\tau(s),s):s\in[0,1]\}$,当 $k_{n-1}\to\infty$ 时,则

$$\|g(t,s)f(s,x_{lm_{k_{n-1}}}(s))-g(t,s)f(s,x_{l(n-1)}(s))\|\leqslant C\|f(s,x_{lm_{k_{n-1}}}(s))-f(s,x_{l(n-1)}(s))\|\to0\tag{37}$$

进而,当 $k_{n-1}\to\infty$ 时,对于(36)取极限可得,

$$\begin{aligned}x_{l(n-1)}(t)=&\int_0^1g(t,s)f(s,x_{l(n-1)}(s))\mathrm{d}s+\frac{\left(1-\sum\limits_{i=1}^{m}\beta_i\eta_i^{n-1}\right)-\left(1-\sum\limits_{i=1}^{m}\beta_i\right)t^{n-1}}{D_m}\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\int_0^1g(\xi_i,s)f(s,x_{l(n-1)}(s))\mathrm{d}s+\\&\frac{\sum\limits_{i=1}^{m}\alpha_i\xi_i^{n-1}+\left(1-\sum\limits_{i=1}^{m}\alpha_i\right)t^{n-1}}{D_m}\sum_{i=1}^{m}\beta_i\int_0^1g(\eta_i,s)f(s,x_{l(n-1)}(s))\mathrm{d}s,\end{aligned}\tag{38}$$

因此,对于 $l=1,2$,由于 $x_{l(n-1)}(t)\in C^n[0,1]$,在(38)两端,对于 t 求 n 次导数可得

$$x^{(n)}_{l(n-1)}(t)+\lambda f(t,x_{l(n-1)}(t))=0,\quad 0<t<1.\tag{39}$$

由(34)和(35),可得

$$x_{l(n-1)}(0)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_ix_{l(n-1)}(\xi_i),x'_{l(n-1)}(0)=\cdots=x^{(n-2)}_{l(n-1)}(0)=0,x_{l(n-1)}(1)=\sum_{i=1}^{m}\beta_ix_{l(n-1)}(\eta_i),\tag{40}$$

因此,由(39)和(40),可知 $x_{l(n-1)}(t)(l=1,2)$ 是(2)的正解.

因此,定理 2 得证.

注 4　由(H2)和(H5)可得:$h(t,x)>0$.

注 5　本文结果推广了文[10,13]的主要结果. 本文的方法可应用到其它高阶无穷远点边值问题中.

由定理 2,可得如下推论.

推论 1 设(H1),(H2),(H5)成立. 假设 $0<\lambda\leqslant\frac{1}{c}\cdot\min\left\{\frac{\gamma}{M},\frac{2}{M_1}\right\}$,则问题(2)存在解 x_1 满足 $\|x_1\|\geqslant\gamma$.

注 6 对于问题(2),引理 1 中格林函数(6)是首次给出的.

[参考文献]

[1] PAUL W E, BASHIR A. Positive solutions of a nonlinear n-th order boundary value problem with nonlocal conditions[J]. Applied mathematics letters, 2005, 18(5): 521-527.

[2] GUO Y P, JI Y D, ZHANG J H. Three positive solutions for a nonlinear n-th order m-point boundary value problem[J]. Nonlinear analysis: TMA, 2008, 68(11): 3485-3492.

[3] JI Y D, GUO Y P. The existence of countably many positive solutions for some nonlinear n-th order m-point boundary value problems[J]. Journal of computational and applied mathematics, 2009, 232(2): 187-200.

[4] YANG J B, WEI Z L. Positive solutions of n-th order m-point boundary value problem[J]. Applied mathematics and computation, 2008, 202(2): 715-720.

[5] PANG C C, DONG W, WEI Z L. Green's function and positive solutions of n-th order m-point boundary value problem[J]. Applied mathematics and computation, 2006, 182(2): 1231-1239.

[6] GRAEF J R, YANG B. Positive solutions to a multi-point or nonlinear higher order boundary value problem[J]. Journal of mathematical analysis and applications, 2006, 316(2): 409-421.

[7] GRAEF J R, MOUSSAOUI T. A Class of n-th order BVPs with nonlocal conditions[J]. Computers and mathematica applications, 2009, 58(8): 1662-1671.

[8] WEBB J R L. Nonlocal conjugate type boundary value problem of higher order[J]. Nonlinear analysis: TMA, 2009, 71(5/6): 1933-1940.

[9] MA Q Z, DU R J. Existence of positive solutions for semipositine multi-point boundary-value problems[J]. Journal of Lanzhou university (natural sciences), 2007, 43(5): 98-100.

[10] ZHAI C B. Existence of positive solutions for semipositine three-point boundary value problems[J]. Journal of computational and applied mathematics, 2009, 228(1): 279-286.

[11] MA R. Multiple positive solutions for a semipositine four-order boundary value problem[J]. Hiroshima Math J, 2003, 33(2): 217-227.

[12] ANURADHA V, HAI D D, SHIVAJI R. Existence results for superlinear semipositine BVP'S[J]. Proceedings of the American mathematical society[J]. 1996, 124(3): 757-763.

[13] 沈文国. 二阶无穷多点半正边值问题正解的存在性问题[J]. 华中师范大学学报(自然科学版), 2013, 47(2): 145-149.

[14] SUN J, WEI J. Existence of positive solutions for semipositine second order three-point boundary value problem[J]. Electronic journal of differential equations, 2008, 79(41): 1-7.

[15] GUO D, LAKSHMIKANTHAM V. Nonlinear problems in abstract cones, vol. 5 of notes and reports in mathematics in science and engineering[M]. Boston, Mass, USA: Academic Press, 1988.

[16] ZHANG G W, SUN J X. A generalization of the cone expansion and compression fixed point theorem and applications[J]. Nonlinear Anal: TMA, 2007, 67(2): 579-586.

[责任编辑:陆炳新]