doi:10.3969/j.issn.1001-4616.2019.01.006

具有年龄结构的 SIR 传染病模型的最优接种和治疗策略

郭中凯[1,2],任秋艳[1,2],李建生[2]

(1.兰州理工大学电气工程与信息工程学院,甘肃 兰州 730050)
(2.兰州理工大学技术工程学院,甘肃 兰州 730050)

[**摘要**]　研究了一类染病者具有年龄结构的 SIR 传染病模型的最优接种和治疗策略问题. 利用 Banach 压缩映射原理和 Gronwall 引理,证明了该传染病模型非负解的唯一性以及解对控制变量的连续依赖性. 借助切锥法锥技巧给出最优接种和治疗策略的必要条件. 根据 Ekeland 变分原理确立了最优接种和治疗策略的存在性和唯一性.

[**关键词**]　年龄结构,传染病,最优控制,Ekeland 变分原理

[**中图分类号**]O157.13;Q141　[**文献标志码**]A　[**文章编号**]1001-4616(2019)01-0028-08

Optimal Control of Age-Structured SIR Epidemic Model with Vaccination and Treatment

Guo Zhongkai[1,2],Ren Qiuyan[1,2],Li Jiansheng[2]

(1.College of Electrical and Information Engineering,Lanzhou University of Technology,Lanzhou 730050,China)
(2.College of Technology and Engineering,Lanzhou University of Technology,Lanzhou 730050,China)

Abstract:This article investigates an optimal control problem with vaccination and treatment for SIR epidemic model with age-structured infected. Uniqueness of non-negative solutions to the model and the continuous dependence of solution on control variables are proved by using the Banach contraction mapping principle and Gronwall's lemma. Necessary optimality conditions of vaccination and treatment are derived by the use of tangent-normal cone technique. Existence of unique optimal control of vaccination and treatment is verified via Ekeland's variational principle.

Key words:age-structured,epidemic,optimal control,Ekeland's variational principle

传染病一直以来都是人类生存和发展的大敌,例如 14 世纪中叶欧洲的黑死病夺走近 3 千万生命,以及当今疟疾在非洲每年夺走数十万人生命. 因此对传染病的发病机理、传播途径以及防治策略的研究显得尤为重要. 建立能够反映传染病动力学的数学模型,并借助模型动力学的定性和定量分析来寻求传染病预防和治疗的最优策略是传染病理论研究的一个重要方面. 在控制传染病的过程中主要目的是控制被感染者的数量,但同时还有许多因素需要考虑,例如公共卫生常识知识的宣传成本、疫苗接种的成本、治疗成本等,这些因素在欠发达国家和地区显得尤为突出. 因此在有限的资源条件下,寻求一种最优的分配这些资源的策略,使得在一段时间内被感染的人数最少,同时花在预防接种和治疗上的费用最低. 接种疫苗是控制传染病最有效的方法之一,在很多文献中都讨论过,如文献[1-3]. 同时,对被感染者采取积极主动的治疗措施,能够降低被感染者的死亡率以及这种传染病的传播风险,因此治疗在传染病的控制中也起到关键的作用. 在文献[2]中,Zaman 等人研究了具有免疫和治疗的 SIR 传染病的最有控制策略问题,建立的模型如下:

收稿日期:2018-01-03.
基金项目:甘肃省高等学校科研项目(2015B-219).
通讯联系人:郭中凯,讲师,研究方向:控制理论与控制工程. E-mail:guozhongkai2010@ outlook.com

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=\mu N-\beta I(t)S(t)-\mu S(t)-u_1(t),\\ \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\beta I(t)S(t)-(\gamma+\mu)I(t)-u_2(t),\\ \dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}=\gamma I(t)-\mu R(t)+(u_1(t)+u_3(t)),\end{cases}\tag{1}$$

这里出生率和死亡率相同都为μ,$N(t)=S(t)+I(t)+R(t)$是常数,感染率为双线感染率$\beta I(t)S(t)$,γ是恢复率,$u_1(t)$、$u_2(t)$分别是免疫控制量和治疗控制量.

目前为止,考虑年龄结构的传染病模型的最优控制策略还不太多,如何泽荣在其博士论文[4]中就讨论了流行病的最优接种策略,蔡礼明等在文献[5]讨论了年龄结构的霍乱模型的最优免疫接种问题. 而只考虑染病年龄的传染病模型的优化控制模型还未见,主要是因为这样的系统是由偏微分方程和常微分方程组成的混合系统,对这样无穷维系统的理论研究成果虽然不少,但是应用起来还是有很多条件限制. 而实际情况是染病年龄因素又是不可忽略的,因为传染病导致的死亡率,以及感染率都是与被感染者的染病时间(染病年龄)的长短有关系. 例如有多种传染病在潜伏期已经具备了传染性,并且在潜伏期和发病初期的病毒、细菌还没有被人体的免疫系统消灭,大部分病原体还存在,因此传染性最强,随着体内病原体的减少,传染性又会逐渐减弱. 另外像百日咳等传染病具有终身免疫,注射疫苗或者染过这种病后的恢复者具有终身免疫.

1 模型的建立

基于上面的分析,本文考虑具有终身免疫和染病年龄的 SIR 传染病模型,研究它在预防接种和治疗情况下的最优控制策略,使得在一段时间内被感染的人数最少同时花在预防接种和治疗上的费用最低. 首先,将t时刻的人群分为 3 类:易感者$S(t)$、染病年龄为a的染病者$I(t,a)$和恢复者$R(t)$,假设输入率是常数Λ,采用双线性感染率,并且考虑按比例接种和治疗,建立如下模型:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}t}=\Lambda-S(t)\displaystyle\int_0^{a_+}\beta(a)I(t,a)\mathrm{d}a-\mu S(t)-\psi(t)S(t), & t\in(0,T),\\ \dfrac{\partial I(t,a)}{\partial t}+\dfrac{\partial I(t,a)}{\partial a}=-\mu(a)I(t,a)-(\gamma(t,a)+\alpha(a))I(t,a), & (t,a)\in Q,\\ \dfrac{\mathrm{d}R(t)}{\mathrm{d}t}=\displaystyle\int_0^{a_+}(\gamma(t,a)+\alpha(a))I(t,a)\mathrm{d}a+\psi(t)S(t)-\mu R(t), & t\in(0,T),\\ I(t,0)=S(t)\displaystyle\int_0^{a_+}\beta(a)I(t,a)\mathrm{d}a, & t\in(0,T),\\ I(0,a)=I_0(a),S(0)=s_0>0,R(0)=r_0>0,\end{cases}\tag{2}$$

式中,$Q=(0,T)\times(0,a_+)$,$\beta(a)$、$\mu(a)$和$\alpha(a)$分别表示依赖感染年龄的感染率、死亡率和自然恢复率,μ表示个体的自然死亡率,$\gamma(t,a)$表示t时刻感染年龄为a的感染者接受治疗的比例,$\psi(t)$表示t时刻易感者接受预防接种的比例,a_+表示个体染病年龄的上限,$0<a_+<\infty$.

这里我们假设染病者恢复后获得终生免疫. 定义容许控制集

$$U=\{u=(h_1,h_2)\in L^\infty(0,T)\times L^\infty(0,T;L^2(0,a_+)):0\leqslant h_1\leqslant H^1,a.e.(0,T);0\leqslant h_2\leqslant H^2,a.e.Q\},$$

式中,H^1、H^2是常数. 本文我们作如下几个假设:

$$(H1)\ \mu(a)\in L^1_{loc}[0,a_+),\mu(a)\geqslant\mu,\forall a\in[0,a_+),\int_0^{a_+}\mu(a)\mathrm{d}a=+\infty;$$

$$(H2)\ \beta(a)、I_0(a)\in L^\infty[0,a_+),0\leqslant\beta(a)\leqslant\beta^0,0\leqslant I_0(a)\leqslant I^0,$$

这里β^0、I^0是常数.

由于模型(2)的前两个方程中不含有变量$R(t)$,因此在后面我们只讨论模型(2)的前两个方程组成的下列系统:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}t}=\Lambda-S(t)\int_0^{a_+}\beta(a)I(t,a)\mathrm{d}a-\mu S(t)-\psi(t)S(t), & t\in(0,T),\\ \dfrac{\partial I(t,a)}{\partial t}+\dfrac{\partial I(t,a)}{\partial a}=-\mu(a)I(t,a)-(\gamma(t,a)+\alpha(a))I(t,a), & (t,a)\in Q,\\ I(t,0)=S(t)\int_0^{a_+}\beta(a)I(t,a)\mathrm{d}a, & t\in(0,T),\\ I(0,a)=I_0(a),S(0)=s_0>0,R(0)=r_0>0.\end{cases}\tag{3}$$

定义1 称一对函数$(S(t),I(t,a))$为系统(3)的弱解,如果这对函数能使下列积分方程组成立:

$$\begin{cases}S(t)=\exp\left\{-\int_0^t\left(\int_0^{a_+}\beta(a)I(s,a)\mathrm{d}a+\mu+\psi(s)\right)\mathrm{d}s\right\}\left(S_0+\Lambda\int_0^t\exp\left\{-\int_0^s\left(\int_0^{a_+}\beta(a)I(\tau,a)\mathrm{d}a+\mu+\psi(\tau)\right)\mathrm{d}\tau\right\}\mathrm{d}s\right),\\ \int_0^{a_+}I(t,s)\mathrm{d}s-\int_0^{a_+}I_0(s)\mathrm{d}s+\int_0^tI(\tau,a)\mathrm{d}\tau=\int_0^tS(\tau)\int_0^{a_+}\beta(a)I(\tau,a)\mathrm{d}a\mathrm{d}\tau-\int_0^t\int_0^a(\mu(s)+\gamma(\tau,s)+\alpha(s))I(\tau,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau.\end{cases}$$

在接下来的内容里提到的解都指的是弱解.

2 模型的适定性

定义$V=(v_1(t),v_2(t,a))$,其中$v_1(t)\in L^\infty(0,T)$,$v_2(t,a)\in L^\infty(0,T;L^2(0,a_+))v_i\geqslant0,i=1,2$.考虑系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}t}=\Lambda-S(t)\int_0^{a_+}\beta(a)v_2(t,a)\mathrm{d}a-\mu S(t)-\psi(t)S(t), & t\in(0,T),\\ \dfrac{\partial I(t,a)}{\partial t}+\dfrac{\partial I(t,a)}{\partial a}=-\mu(a)I(t,a)-(\gamma(t,a)+\alpha(a))I(t,a), & (t,a)\in Q,\\ I(t,0)=v_1(t)\int_0^{a_+}\beta(a)I(t,a)\mathrm{d}a, & t\in(0,T),\\ I(0,a)=I_0(a),S(0)=s_0>0,R(0)=r_0>0.\end{cases}\tag{4}$$

根据常微分方程标准的证明方法和文献[6-7]得系统(4)有唯一非负解:

$$P^V=(S^V(t),I^V(t,a)),S^V(t)\in C(0,T)\cap L^\infty(0,T),I^V\in L^\infty(0,T;L^2(0,a_+))\cap L^\infty(Q).$$

利用比较原理知$S^V\leqslant\bar{S}\leqslant\min\{s_0,\Lambda/\mu\}$,这里$\bar{S}$是下列系统的有界解:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y_1(t)}{\mathrm{d}t}=\Lambda-\mu y_1, & t\in(0,T),\\ y_1(0)=s_0.\end{cases}$$

如果$v_1(t)\leqslant\bar{S}$,则$I^V(t,a)\leqslant\bar{I}(t,a)$,其中$\bar{I}(t,a)$是下列系统的有界解:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial y_2(t,a)}{\partial t}+\dfrac{\partial y_2(t,a)}{\partial a}=-\mu(a)y_2(t,a), & (t,a)\in Q,\\ I(t,0)=\bar{S}(t)\int_0^{a_+}\beta(a)y_2(t,a)\mathrm{d}a, & t\in(0,T),\\ y_2(0,a)=I_0(a).\end{cases}$$

令$V_{(i)}=(v_{i1},v_{i2}),i=1,2$,且$0\leqslant v_{i1}\leqslant\bar{S},0\leqslant v_{i2}\leqslant\bar{I}$,记系统(4)相对应的解为$P_{(i)}=(S_i,I_i)$,且令$x=(x_1,x_2)=P_{(1)}-P_{(2)}$.

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=-x_1\int_0^{a_+}\beta(a)v_{12}(t,a)\mathrm{d}a-(\mu+\psi(t))x_1-S_2\int_0^{a_+}\beta(a)(v_{12}(t,a)-v_{22}(t,a))\mathrm{d}a, & t\in(0,T),\\ \dfrac{\partial x_2(t,a)}{\partial t}+\dfrac{\partial x_2(t,a)}{\partial a}=-(\mu(a)+\gamma(t,a)+\alpha(a))x_2(t,a), & (t,a)\in Q,\\ x_2(t,0)=v_{11}(t)\int_0^{a_+}\beta(a)x_2(t,a)\mathrm{d}a+(v_{11}-v_{21})\int_0^{a_+}\beta(a)I_2(t,a)\mathrm{d}a, & t\in(0,T),\\ x_2(0,a)=0,\quad x_1(0)=0.\end{cases}\tag{5}$$

对(5)第一个等式乘以x_1,并在$(0,T)$上积分,对第二个等式乘以x_2并在Q上积分,并利用Gronwall

不等式可得

$$|x_1(t)|^2 \leqslant a_0 \int_0^t \| v_{12}(s,\cdot) - v_{22}(s,\cdot) \|^2_{L^2(0,a_+)} \mathrm{d}s,$$

$$\| x_2(t,\cdot) \|^2_{L^2(0,a_+)} \leqslant a_0 \int_0^t |v_{11}(s) - v_{21}(s)|^2 \mathrm{d}s,$$

式中,a_0 是与 $V_{(i)}$ 无关的常数.

考虑集合

$$E = \{ (v_1, v_2) \in L^\infty(0,T) \times L^\infty(0,T; L^2(0,a_+)) : 0 \leqslant v_1(t) \leqslant \bar{S}, t \in (0,T), 0 \leqslant v_2(t,a) \leqslant \bar{I}, (t,a) \in Q \}.$$

定义映射 $G: E \to E, G(V) = P^V$,以及等价范数

$$\| V \|_* = \| (v_1, v_2) \|_* = \underset{t \in (0,T)}{ess\sup} \{ \exp(-2a_0 t)(|v_1(t)|^2 + \| v_2(\cdot,t) \|^2_{L^2(0,a_+)}) \},$$

这里的 P^V 是系统(4)的解.

$$\| G(V_{(1)}) - G(V_{(2)}) \|_* = \| P^{V(1)} - P^{V(1)} \|_* = \| (x_1, x_2) \|_* = \underset{t \in (0,T)}{ess\sup} \{ \exp(-2a_0 t)(| x_1(t) |^2 + \| x_2(t,\cdot) \|^2_{L^2(0,a_+)}) \} \leqslant a_0 \underset{t \in (0,T)}{ess\sup} \left\{ \exp(-2a_0 t) \int_0^t (| v_{11}(s) - v_{21}(s) |^2 + \| v_{12}(s,\cdot) - v_{22}(s,\cdot) \|^2_{L^2(0,a_+)}) \mathrm{d}s \right\} = a_0 \underset{t \in (0,T)}{ess\sup} \left\{ \exp(-2a_0 t) \int_0^t \exp(2a_0 s)(| v_{11}(s) - v_{21}(s) |^2 + \| v_{12}(s,\cdot) - v_{22}(s,\cdot) \|^2_{L^2(0,a_+)}) \exp(-2a_0 s) \mathrm{d}s \right\} \leqslant \| V_{(1)} - V_{(2)} \|_* a_0 \underset{t \in (0,T)}{ess\sup} \exp(-2a_0 t) \times \int_0^t \exp(2a_0 s) \mathrm{d}s \leqslant \frac{1}{2} \| V_{(1)} - V_{(2)} \|_*.$$

因此,G 是空间$(E, \|\cdot\|_*)$上的压缩映射,那么存在唯一的不动点 V^*,它就是系统(3)的解.

记 $u^i = (\psi_i, \gamma_i) \in U, i = 1,2, x = P^{u1} - P^{u2} = (x_1 - x_2)$, 其中 $P^{ui} = (S_i, I_i)$是系统(3)对应 $u = u^i$ 的解. 由系统(3)可知

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = -(\mu + \psi_2)x_1(t) - (\psi_1 - \psi_2)S_1 - \left(S_1 \int_0^{a_+} \beta(a) x_2(t,a) \mathrm{d}a + x_1(t) \int_0^{a_+} \beta(a) I_2(t,a) \mathrm{d}a \right), \\ \dfrac{\partial x_2(t,a)}{\partial t} + \dfrac{\partial x_2(t,a)}{\partial a} = -(\mu(a) + \gamma(t,a) + \alpha(a)) x_2(t,a) - (\gamma_1 - \gamma_2) I_1, \\ x_2(t,0) = S_1 \int_0^{a_+} \beta(a) x_2(t,a) \mathrm{d}a + x_1 \int_0^{a_+} \beta(a) I_2(t,a) \mathrm{d}a, \\ x_2(0,a) = 0, \quad x_1(0) = 0. \end{cases}$$

类似于(5)的处理过程我们可以推出

$$|x_1(t)|^2 \leqslant c_1 \int_0^t |x_1(s)| \mathrm{d}s + c_2 \int_0^t |\psi_1(s) - \psi_2(s)|^2 \mathrm{d}s + c_3 \int_0^t \| x_2(s,\cdot) \|^2_{L^2(0,a_+)} \mathrm{d}s,$$

$$\| x_2(t,\cdot) \|^2_{L^2(0,a_+)} \leqslant c_4 \int_0^t |x_1(s)| \mathrm{d}s + c_5 \int_0^t \| \gamma_1(s,\cdot) - \gamma_2(s,\cdot) \|^2_{L^2(0,a_+)} \mathrm{d}s + c_6 \int_0^t |x_2(s,\cdot)|^2_{L^2(0,a_+)} \mathrm{d}s,$$

式中,c_1 是与 u_j 无关的常数,$i = 1,2,\cdots,6, j = 1,2$. 将上面两个式子相加,并使用 Gronwall 不等式可得

$$|x_1(t)|^2_{L^\infty(0,T)} + \| x_2(t,\cdot) \|^2_{L^\infty(0,T;L^2(0,a_+))} \leqslant b_0 T(|\psi_1(t) - \psi_2(t)|^2_{L^\infty(0,T)} + \| \gamma_1(s,\cdot) - \gamma_2(s,\cdot) \|^2_{L^\infty(0,T;L^2(0,a_+))}).$$

因此,由上面分析我们能够得到下面的结论:

定理 1 对于任意给定的 $u \in U$,系统(3)存在唯一解 P^u,满足

(1)$P^u = (S^u, I^u) \in L^\infty(0,T) \times L^\infty(Q)$;

(2)$0 \leqslant S^u \leqslant \bar{S}, t \in (0,T), 0 \leqslant I^u \leqslant \bar{I}, (t,a) \in Q$;

(3)P^u 对 u 是连续依赖的.

3 最优性条件

考虑控制问题

$$\min_{u \in U} J(P^u, u) = \int_Q (I(t,a) + \frac{1}{2}\rho_2 \gamma(t,a)^2) \mathrm{d}a\mathrm{d}t + \int_0^T \frac{1}{2}\rho_1 \psi(t)^2 \mathrm{d}t, \tag{6}$$

式中,$u=(\psi(t),\gamma(t,a))$,P^u 是系统(3)的解,ρ_1、$\rho_2>0$ 是权重参数,$J(P^u,u)$表示在$(0,T)$这段时间内的染病人数和花费成本,我们的目标是要在染病人数最少的情况下,使得花费的成本最低.

设$(P^*,u^*)(P^*=(S^*,I^*),u^*=(\psi^*,\gamma^*))$是(6)的解. $\forall\omega=(\omega_1,\omega_2)\in T_U(u^*)$(集合 U 在 u^* 处的切锥),可知对于充分小的 $\varepsilon>0$,都有 $u_\varepsilon:=u^*+\varepsilon\omega\in U$.因此

$$J(P^\varepsilon,u^\varepsilon)\geqslant J(P^*,u^*),$$

这里 $P^\varepsilon=(S^\varepsilon,I^\varepsilon)$是系统(3)在 $u=u^\varepsilon$ 的解. 由上式和系统(6)我们能得到

$$\int_Q(I^*+\frac{1}{2}\rho_2\gamma^{*2})\mathrm{d}a\mathrm{d}t+\int_0^T\frac{1}{2}\rho_1\psi^{*2}\mathrm{d}t\leqslant\int_Q(I^\varepsilon+\frac{1}{2}\rho_2(\gamma^*+\varepsilon\omega_2)^2)\mathrm{d}a\mathrm{d}t+\int_0^T\frac{1}{2}\rho_1(\psi^*+\varepsilon\omega_1)^2\mathrm{d}t.\tag{7}$$

将(7)左边移到右边,然后两边除以 ε 并令 $\varepsilon\to0^+$得

$$\int_Q(z_2(t,a)+\rho_2\gamma^*\omega_2)\mathrm{d}a\mathrm{d}t+\int_0^T\rho_1\psi^*\omega_1\mathrm{d}t\geqslant0,\tag{8}$$

这里 $z_1(t)=\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\frac{1}{\varepsilon}(S^\varepsilon-S^*)$, $z_2(t,a)=\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\frac{1}{\varepsilon}(I^\varepsilon-I^*)$,并且满足下列系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}z_1(t)}{\mathrm{d}t}=-\mu z_1(t)-\left(S^*\int_0^{a_+}\beta(a)z_2(t,a)\mathrm{d}a+z_1\int_0^{a_+}\beta(a)I^*(t,a)\mathrm{d}a\right)-\psi^*z_1-\omega_1S^*,\\ \dfrac{\partial z_2(t,a)}{\partial t}+\dfrac{\partial z_2(t,a)}{\partial a}=-(\mu(a)+\gamma^*(t,a)+\alpha(a))z_2(t,a)-\omega_2I^*,\\ z_2(t,0)=S^*\int_0^{a_+}\beta(a)z_2(t,a)\mathrm{d}a+z_1\int_0^{a_+}\beta(a)I^*(t,a)\mathrm{d}a,\\ z_2(0,a)=0,\quad z_1(0)=0.\end{cases}\tag{9}$$

对(9)的第一个方程两边同时乘以 $q_1(t)$并且在$(0,T)$上积分,并约定 $q_1(T)=0$,我们能够得到

$$\int_0^Tz_1\left(\frac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}t}-\left(\mu+\psi^*+\int_0^{a_+}\beta(a)I^*\mathrm{d}a\right)q_1\right)\mathrm{d}t-\int_0^T(\omega_1S^*+S^*\int_0^{a_+}\beta(a)z_2(t,a)\mathrm{d}a)q_1\mathrm{d}t=0.\tag{10}$$

对(9)的第二个方程两边同时乘以 $q_2(t,a)$并且在 Q 上积分,并约定 $q_2(T,a)=0$,$q_2(t,a_+)=0$,我们能够得到

$$-\int_Qz_2\left(\frac{\partial q_2}{\partial t}+\frac{\partial q_2}{\partial a}\right)\mathrm{d}a\mathrm{d}t-\int_Qq_2(t,0)(S^*\beta(a)z_2(t,a)+z_1(t)\beta(a)I^*(t,a))\mathrm{d}a\mathrm{d}t=$$
$$-\int_Q(\mu(a)+\gamma^*(t,a)+\alpha(a))z_2(t,a)+\omega_2I^*)q_2(t,a)\mathrm{d}a\mathrm{d}t.\tag{11}$$

由(10)、(11)能够推出

$$\int_Qz_2(t,a)\mathrm{d}a\mathrm{d}t=\int_0^Tz_1\left(\frac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}t}-\left(\mu+\psi^*+\int_0^{a_+}\beta(a)I^*\mathrm{d}a\right)q_1+\int_0^{a_+}q_2(t,0)\beta(a)I^*(t,a)\mathrm{d}a\right)\mathrm{d}t+$$
$$\int_Qz_2\left(\left(\frac{\partial q_2}{\partial t}+\frac{\partial q_2}{\partial a}\right)+q_2(t,0)S^*\beta(a)-(\mu(a)+\gamma^*(t,a)+\alpha(a))\right)q_2(t,a)+1-\beta(a)S^*q_1(t))\mathrm{d}a\mathrm{d}t=$$
$$\int_0^T\omega_1S^*q_1(t)\mathrm{d}t-\int_Q\omega_2I^*q_2(t,a)\mathrm{d}a\mathrm{d}t.\tag{12}$$

根据(12)定义系统(3)的共轭系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}t}=\left(\mu+\psi+\int_0^{a_+}\beta(a)I^u\mathrm{d}a\right)q_1-\int_0^{a_+}q_2(t,0)\beta(a)I^u(t,a)\mathrm{d}a,\\ \dfrac{\partial q_2}{\partial t}+\dfrac{\partial q_2}{\partial a}=-q_2(t,0)S^u\beta(a)+(\mu(a)+\gamma(t,a)+\alpha(a))q_2(t,a)-1+\beta(a)S^*q_1(t),\\ q_2(t,a_+)=0,\\ q_2(T,a)=0,q_1(T)=0,\end{cases}\tag{13}$$

这里(S^u,I^u)是系统(3)对应 $u=(\psi,\gamma)$的解. 现在让(13)中 $u=u^*$代入到(12),得到的等式再与(8)结合得

$$\int_Q(-\rho_2\gamma^*+I^*q_2(t,a))\omega_2\mathrm{d}a\mathrm{d}t+\int_0^T(-\rho_1\psi^*+S^*q_1(t))\omega_1\mathrm{d}t\leqslant 0. \tag{14}$$

因此$(-\rho_1\psi^*+S^*q_1(t),-\rho_2\gamma^*+I^*q_2(t,a))\in N_U(u^*)$. 进一步得到下列定理:

定理 2 若(P^*,u^*)是(6)的解,则

$$\psi^*=L_1\left(\frac{S^*q_1(t)}{\rho_1}\right),\gamma^*=L_2\left(\frac{I^*q_2(t,a)}{\rho_2}\right),$$

这里

$$L_i(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ x, & 0\leqslant x\leqslant H^i, \quad i=1,2,\\ H^i, & x>H^i,\end{cases}$$

并且(q_1,q_2)是系统(13)对应 $u=u^*$ 的解.

4 最优控制的存在性

定义 $\Phi(u):L^1(0,T)\times L^1(Q)\to(-\infty,+\infty]$,

$$\Phi(u)=\begin{cases}+\infty & u\notin U,\\ J(P^u,u) & u\in U.\end{cases} \tag{15}$$

不难证明下述引理:

引理 1 $\Phi(u)$是下半连续的.

证明 设 $u_n=(\psi_n,\gamma_n)$是 $L^1(0,T)\times L^1(Q)$中任一序列,且有 $u_n\to u=(\psi,\gamma)$. 不妨设 $u_n\in U,n\geqslant 1$. 根据定理 1 可以推出对任一 $t\in(0,T)$, $I^{u_n}(t,\cdot)\to I^u(t,a)$. 再根据 Riesz 定理能够推出存在一个子序列(仍记为 u_n,使得 $u_n\to u$ 在$(0,T)\times Q$ 上几乎处处成立,以及 $I^{u_n}(t,\cdot)\to I^u(t,a)$在 Q 上几乎处处成立. 从而

$$I^{u_n}(t,a)+\frac{1}{2}\rho_2\gamma_n(t,a)^2\to I^u(t,a)+\frac{1}{2}\rho_2\gamma(t,a)^2$$

在 Q 内几乎处处成立,以及

$$\frac{1}{2}\rho_1\psi_n(t)^2\to\frac{1}{2}\rho_1\psi(t)^2$$

在$(0,T)$内几乎处处成立. 利用 Fatou 定理,可以得到

$$\varliminf_{n\to\infty}\Phi(u_n)\geqslant\Phi(u).$$

因此,$\Phi(u)$是下半连续的.

根据[8],我们能够推出系统(13)的$|q_2(u)|$、$|q_1(u)|$是有界的,并使用[8]命题 5.2 的类似证明[8],我们也可以推出:

引理 2 对于共轭系统(13)有下列不等式成立

$$|q_1{}^{u_1}-q_1{}^{u_2}|^2_{L^\infty(0,T)}+\|q_2{}^{u_1}-q_2{}^{u_1}\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(0,a_+))}\leqslant b_1T(|\psi_1(t)-\psi_2(t)|^2_{L^\infty(0,T)}+\|\gamma_1(t,a)-\gamma_2(t,a)\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(0,a_+))}), \tag{16}$$

式中,$q^{u_i}=(q_1{}^{u_i},q_2{}^{u_i})$,$i=1,2$ 是系统(13)$u=u_i$ 的解,b_1 是与 u_j 无关的常数,$j=1,2$.

根据 Ekeland 变分原理,$\forall\varepsilon>0$,$u_\varepsilon=(\psi^\varepsilon,\gamma^\varepsilon)\in U$,使得

$$\begin{aligned}&\Phi(u_\varepsilon)\leqslant\inf\Phi(u)+\varepsilon,\\ &\Phi(u_\varepsilon)\leqslant\inf\{\Phi(u)+\sqrt{\varepsilon}(|\psi(t)-\psi^\varepsilon(t)|^2_{L^1(0,T)}+\|\gamma(t,a)-\gamma^\varepsilon(t,a)\|^2_{L^1(Q)})\}.\end{aligned} \tag{17}$$

令

$$\Phi(u)+\sqrt{\varepsilon}(|\psi(t)-\psi^\varepsilon(t)|^2_{L^1(0,T)}+|\gamma(t,a)-\gamma^\varepsilon(t,a)|^2_{L^1(Q)},$$

知 $\Phi(u_\varepsilon)$在 $u=u_\varepsilon$ 处取最小值. 因此和前一节找最优条件一样,能够得到

$$\int_Q(\rho_2\gamma^\varepsilon-I^\varepsilon q_2(t,a))\omega_2\mathrm{d}a\mathrm{d}t+\int_0^T(\rho_1\psi^\varepsilon-S^\varepsilon q_1(t))\omega_1\mathrm{d}t+\sqrt{\varepsilon}\int_Q|\omega_2|\mathrm{d}a\mathrm{d}t+\sqrt{\varepsilon}\int_0^T|\omega_1(t)|\mathrm{d}t\geqslant 0, \tag{18}$$

由文献[4]中命题 1.4.4 得到

$$(-\rho_1\psi^\varepsilon+S^\varepsilon q_1(t)+\sqrt{\varepsilon}\theta_1^\varepsilon(t),-\rho_2\gamma^\varepsilon+I^\varepsilon q_2(t,a)+\sqrt{\varepsilon}\theta_2^\varepsilon(t,a))\in N_U(u^\varepsilon).$$

这里 $|\theta_1^\varepsilon(t)|\leqslant 1$ 几乎处处与 $(0,T)$, $|\theta_2^\varepsilon(t,a)|\leqslant 1$ 几乎处处与 Q. 因此

$$\psi^\varepsilon=L_1\left(\frac{S^\varepsilon q_1(t)+\sqrt{\varepsilon}\theta_1^\varepsilon(t)}{\rho_1}\right),\gamma^\varepsilon=L_2\left(\frac{I^* q_2(t,a)+\sqrt{\varepsilon}\theta_2^\varepsilon(t,a)}{\rho_2}\right). \tag{19}$$

定义 $B:U\to U$, $B(u)=L(u)=\left(L_1\left(\frac{S^\varepsilon q_1(t)}{\rho_1}\right),L_2\left(\frac{I^\varepsilon q_2(t,a)}{\rho_2}\right)\right)$,并定义范数

$$\|u\|_\infty=\|\psi\|_{L^\infty(0,T)}+\|\gamma\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,a_+))},$$

结合定理 1、引理 2 以及基本的放缩方法我们能够推出下列定理:

定理 3　如果

$$M=8\rho_1^{-1}(\|\bar{S}\|^2_{L^\infty(0,T)}b_1T+\|q_1^0\|^2_{L^\infty(0,T)}b_0T+b_0T((H^1)^2+(H^2)^2a_+)b_1T)+8\rho_2^{-1}(\|\bar{I}\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(0,a_+))}b_1T+\|q_2^0\|^2_{L^\infty(Q)}b_0T+b_0T((H^1)^2+(H^2)^2a_+)b_1T)<1,$$

那么(6)有唯一解,这里 $q^0=(q_1^0,q_2^0)$ 是共轭系统(13) $u=0$ 的解.

证明

$$|B(u_1)-B(u_2)|^2_\infty\leqslant\left(\left\|\frac{I^{u_1}q_2{}^{u_1}}{\rho_2}-\frac{I^{u_2}q_2{}^{u_2}}{\rho_2}\right\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,a_+))}+\left\|\frac{S^{u_1}q_1{}^{u_1}}{\rho_1}-\frac{S^{u_2}q_1{}^{u_2}}{\rho_1}\right\|_{L^\infty(0,T)}\right)^2\leqslant$$
$$2(\rho_2^{-1}\|I^{u_1}q_2{}^{u_1}-I^{u_2}q_2{}^{u_2}\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,a_+))}+\rho_1^{-1}\|S^{u_1}q_1{}^{u_1}-S^{u_2}q_1{}^{u_2}\|_{L^\infty(0,T)}{}^2)\leqslant$$
$$8\rho_2^{-1}(\|\bar{I}\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,a_+))}\|q_2{}^{u_1}-q_2{}^{u_2}\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,a_+))}+$$
$$(\|q_2{}^{u_1}-q_2^0\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,a_+))}+\|q_2^0\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,a_+))})\|I^{u_1}-I^{u_2}\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,a_+))})+$$
$$8\rho_1^{-1}(\|\bar{S}\|_{L^\infty(0,T)}{}^2\|q_1{}^{u_1}-q_1{}^{u_2}\|_{L^\infty(0,T)}{}^2+(\|q_1{}^{u_1}-q_1^0\|_{L^\infty(0,T)}{}^2+\|q_1^0\|_{L^\infty(0,T)}{}^2)\|S^{u_1}-S^{u_2}\|_{L^\infty(0,T)}{}^2)\leqslant$$
$$M(\|\psi_1(t)-\psi_2(t)\|^2_{L^\infty(0,T)}+\|\gamma_1(t,a)-\gamma_2(t,a)\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(0,a_+))})\leqslant M\|u_1-u_2\|^2_\infty,$$

M 是与 u_1、u_2 无关的常数,由定理的条件知 B 是压缩的,从而存在唯一不动点 $u_0\in U$. 下面我们要证

$$\Phi(u_0)\leqslant\inf\{\Phi(u):u\in U\}.$$

因为

$$\|B(u_\varepsilon)-u_\varepsilon\|_\infty\leqslant\left\|\frac{S^{u_\varepsilon}q_1{}^{u_\varepsilon}}{\rho_1}-\frac{S^{u_\varepsilon}q_1{}^{u_\varepsilon}+\sqrt{\varepsilon}\theta_1^\varepsilon(t)}{\rho_1}\right\|_{L^\infty(0,T)}+\left\|\frac{I^{u_\varepsilon}q_2{}^{u_\varepsilon}}{\rho_2}-\frac{I^{u_\varepsilon}q_2{}^{u_\varepsilon}+\sqrt{\varepsilon}\theta_2^\varepsilon(t,a)}{\rho_2}\right\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,a_+))}\leqslant\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{\sqrt{a_+}}{\rho_2}\right)\sqrt{\varepsilon},$$

$$\|u_\varepsilon-u_0\|_\infty\leqslant\|B(u_0)-B(u_\varepsilon)\|_\infty+\|B(u_\varepsilon)-u_\varepsilon\|_\infty\leqslant\sqrt{M}\|u_1-u_2\|_\infty+\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{\sqrt{a_+}}{\rho_2}\right)\sqrt{\varepsilon}.$$

因此

$$\|u_\varepsilon-u_0\|_\infty\leqslant\frac{\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{\sqrt{a_+}}{\rho_2}\right)\sqrt{\varepsilon}}{1-\sqrt{M}}.$$

所以当 $\varepsilon\to 0^+$, $u_\varepsilon\to u_0$,根据(17)以及引理 1 得到

$$\Phi(u_0)\leqslant\inf\Phi(u),$$

从而

$$\Phi(u_0)\leqslant\inf\{\Phi(u):u\in U\}.$$

5　结论

本文研究了具有染病年龄的 SIR 传染病模型在带有预防接种和治疗情况下最优控制策略问题. 通过详细的理论分析表明,如果某种传染病一旦在某一地区爆发,我们可以通过在不同的时间段对易感者进行不同程度的接种疫苗,以及让不同时间段染病时间不同的病人进行不同比例接受治疗,使在一段时间内染病人数最少,从而达到控制这种传染病的目的,同时花费在这种传染病上的成本也最少. 从而为实际传染病控制提供理论依据.

[参考文献]

[1] 郭中凯,王文婷,李自珍. 具有脉冲免疫接种的 SEIRS 传染病模型分析[J]. 南京师大学报(自然科学版),2013,36(2):20-26.

[2] ZAMAN G,KANG Y H,CHO G,et al. Optimal strategy of vaccination and treatment in an SIR epidemic model[J]. Mathematics and computers in simulation,2017,136:63-77.

[3] 廖书,杨炜明. 一类含有预防接种的 SVIR 最优控制模型[J]. 西南大学学报(自然科学版),2015,37(1):72-78.

[4] 何泽荣. 带年龄结构的种群动力系统的最优控制[D]. 西安:西安交通大学,2003.

[5] CAI L M,MODMAK C,WANG J. An age-structured model for cholera control with vaccination[J]. Applied mathematics and computation,2017,299:127-140.

[6] ANITA S. Analysis and control of age-dependent population dynamics[M]. Dordrecht,Boston,London:Kluwer Academic Publishers,2000.

[7] IANNELLI M. Mathematical theory of age-structured population dynamics[M]. Pisa:Giardini Editori E Stampatori,1995.

[8] BARBU V,IANNELLI M. Optimal control of population dynamics[J]. Journal of optimization theory and applications,1999,102(1):1-14.

[责任编辑:陆炳新]