doi:10.3969/j.issn.1001-4616.2019.01.007

微分方程边值问题中的上、下解及拓扑度

郑 莹[1],王发兴[1],高广花[2]

(1.南京邮电大学通达学院,江苏 扬州 225127)
(2.南京邮电大学理学院,江苏 南京 210046)

[摘要] 研究了不同边界条件的二阶非线性微分方程 $\Delta^2u(t-1)=f(t,u(t))$, $t\in[1,T]$. 其中 $f:[1,T]\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是连续的,$T\geqslant 1$ 是一个固定的自然数. 首先,我们研究了顺序上、下解的情况. 然后研究了逆序上、下解的情况. 并且证明了在这两种情况下,拓扑度与严格上、下解之间的关系,利用这个关系我们得到了离散边值问题的存在性.

[关键词] 离散边值问题,拓扑度,上、下解

[中图分类号]O175.14 [文献标志码]A [文章编号]1001-4616(2019)01-0036-09

Upper and Lower Solutions and Topological Degree in Difference Equations Boundary Value Problems

Zheng Ying[1],Wang Faxing[1],Gao Guanghua[2]

(1.Tongda College of Nanjing University of Posts and Telecommunications,Yangzhou 225127,China)
(2.College of Science,Nanjing University of Posts & Telecommunications,Nanjing 210046,China)

Abstract:This paper deals with second order nonlinear difference equation $\Delta^2u(t-1)=f(t,u(t))$, $t\in[1,T]$ with different boundary conditions, where $f:[1,T]\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ is continuous, $T\geqslant 1$ a fixed natural number. Firstly, we consider the case of well order lower and upper solutions. Secondly, we investigate the case of upper and lower solutions having the opposite ordering. We prove the relation between the topological degree and strict upper and lower solutions in both cases and using this we get the existence results for the discrete boundary value problems under consideration.

Key words:discrete boundary value problem, topological degree, lower and upper solutions

给定 $a,b\in\mathbf{Z}$ 且 $a<b$,我们利用 $[a,b]$ 来表示 $\{a,a+1,a+2,\cdots,b-1,b\}$. 令 $X:=\{u:[0,T+1]\to\mathbf{R}\}$, $Y:=\{u\mid u:[1,T]\to\mathbf{R}\}$,且分别有范数

$$\|u\|_X=\max_{k\in[0,T+1]}|u(k)|,$$

$$\|u\|_Y=\max_{k\in[1,T]}|u(k)|.$$

易得 $(X,\|\cdot\|_X)$ 和 $(Y,\|\cdot\|_Y)$ 均是巴拿赫空间. 本文,我们研究的是微分方程

$$\Delta^2u(t-1)=f(t,u(t)),t\in[1,T], \tag{1}$$

且满足边界条件

$$\Delta u(0)=\Delta u(T)=0, \tag{2}$$

$$u(0)=u(T),u(1)=u(T+1), \tag{3}$$

$$u(0)=u(c),u(d)=u(T+1), \tag{4}$$

式中,$0<c\leqslant d<T+1$, 且非线性边界为

$$g_1(u(0),\Delta u(0))=0,g_2(u(T+1),\Delta u(T))=0, \tag{5}$$

这里 g_1,g_2 在第二个讨论中均是严格递增的,且 $f:[1,T]\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是连续的.

收稿日期:2017-09-01.
基金项目:国家自然科学青年基金项目(11401319).
通讯联系人:王发兴,副教授,研究方向:泛函分析,微分方程. E-mail:wangfx@ njupt.edu.cn

定义 1　若函数 σ_1,σ_2 满足

$$\Delta^2\sigma_1(t-1)\geqslant f(t,\sigma_1(t)),t\in[1,T], \tag{6}$$

$$\Delta^2\sigma_2(t-1)\leqslant f(t,\sigma_2(t)),t\in[1,T], \tag{7}$$

则 σ_1,σ_2 分别是系统(1)的下解和上解. 若不等式(6),(7)是严格的,则 σ_1,σ_2 被称为严格的下解和上解.

为了得到存在性的结论,我们需要给出原始边值问题或适当的辅助边值问题解的一个先验估计. 我们想只通过 σ_1,σ_2 来估计解. 对于端点 $0,T+1$ 的估计,我们利用 σ_1,σ_2 之间确定的关系及边界条件. 对于两点边界条件(2),(3),(4)和(5)的联系有以下形式:

对于 Neumann 条件(2),我们假设

$$\Delta\sigma_i(0)(-1)^i\leqslant 0,\Delta\sigma_i(T)(-1)^i\geqslant 0,i=1,2. \tag{8}$$

对于周期条件(3),我们假设

$$\sigma_i(0)=\sigma_i(T),(\sigma_i(1)-\sigma_i(T+1))(-1)^i\geqslant 0,\quad i=1,2. \tag{9}$$

类似地,对于四点条件(4),σ_1,σ_2 满足

$$\begin{matrix}(\sigma_i(c)-\sigma_i(0))(-1)^i\leqslant 0,\\ (\sigma_i(T+1)-\sigma_i(d)(-1)^i)\geqslant 0,\end{matrix}\ i=1,2 \tag{10}$$

对于非线性条件(5),我们利用 σ_1,σ_2 得到

$$\begin{matrix}g_1(\sigma_i(0),\Delta\sigma_i(0))(-1)^i\leqslant 0,\\ g_2(\sigma_i(T+1),\Delta\sigma_i(T))(-1)^i\geqslant 0,\end{matrix}\ i=1,2. \tag{11}$$

问题(1)-(5)可以被写作算子方程的形式

$$(L+N)u=0, \tag{12}$$

式中,L:dom $L\to Y$ 是一个线性算子,并且它是指数为 0 的一个 Fredholm 映射. 通常 $N:X\to Y$ 是非线性的,在任何有界开集合 $\Omega\subset X$ 上是 L-紧的. L 和 N 的形式以及空间 dom L 的选择依赖于边值问题的类型.

对于 $k\in\{2,3,4\}$,我们令 L:dom $L\subset X\to Y$

$$Lu(t)=\Delta^2u(t-1),u\in X,$$

式中,dom $L=\{u\in X|u$ 满足(k)式$\}$,并且

$$N:X\to Y$$
$$N_u=-f(\cdot,u(\cdot)).$$

对于边界条件(5),令 L:dom $L\to Z$

$$Lu=(\Delta^2u(t-1),0,0),$$

式中,$L=X\times\mathbf{R}^2,Z=Y\times\mathbf{R}^2$,且 $N:X\to Z$

$$N_u=(-f(\cdot,u(\cdot)),g_1(u(0),\Delta u(0)),g_2(u(T+1),\Delta u(T))).$$

若方程(12)在 Ω 边界上没有解,在 Ω 内存在对应于 L 的映射 $L+N$ 的度

$$d_L(L+N,\Omega).$$

我们的想法来自文献[1],该作者研究了 Neumann、周期、四点和非线性边界条件的微分方程

$$u''(t)=f(t,u(t),u'(t)),\quad 0<t<1, \tag{13}$$

在式(13)中 f 显然依附于 u'. 但在离散的情况下,如果 f 依附于 Δu,即使只考虑下解和上解为常数的情况,在拓扑度的计算中也会遇到困难. 所以,本文仅考虑 f 不依附于 Δu 的情况. 与文献[1]不同,在研究顺次下解和上解的情况时,我们不要求 f 有界.

在文献[2-7]通过研究下解和上解从而讨论微分方程边值问题解的存在性,但是并未涉及拓扑度与下解和上解的关系. 对于差分方程,可以参考文献[8-12]. 本文组织如下:第二节中,我们研究顺次下解和上解的情况;第三节中,我们研究逆次下解和上解的情况;最后我们给出问题(1)-(5)的一些存在性结果.

1　顺次上、下解

定理 1　假设 $k\in\{2,3,4,5\}$. 令(12)为对应于问题(1),(k)的算子方程,且令 σ_1,σ_2 是(1),(k)的严

格下解和上解,并有

$$\sigma_1(t)<\sigma_2(t),\quad \forall t\in[0,T+1].$$

那么就有

$$d_L(L+N,\Omega_1)=1,\quad \Omega_1=\{u\in X\mid \sigma_1(t)<u(t)<\sigma_2(t)\},\ t\in[0,T+1]\}. \tag{14}$$

在证明中我们需要用到以下两个引理:考虑

问题(1)-(5)的上解和下解分别是常数$-p$,p的情形.

引理1　对于问题(1)-(5)以及对应的方程(12). 假设$p\in(0,\infty)$使得

$$f(t,-p)<0,f(t,p)>0,\ \forall t\in[1,T]. \tag{15}$$

那么

$$d_L(L+N,\Omega_2)=1,$$

式中,$\Omega_2=\{u\in X\,\|\,u(t)|<p,\quad \forall t\in[0,T+1]\}$.

证明　设$\tilde{f}(t,u,\lambda)=\lambda f(t,u)+(1-\lambda)u$,式中,$\lambda\in[0,1]$. 研究边界条件为$(k)$,$k\in\{2,3,4\}$方程

$$\Delta^2u(t-1)=\tilde{f}(t,u,\lambda),\quad \lambda\in[0,1],$$

的参数系统及对应的算子方程

$$Lu+\tilde{N}(u,\lambda)=0, \tag{16}$$

式中,$\mathrm{dom}\,L=\{u\in X:u$ 满足$(k)\}$,$L:\mathrm{dom}\,L\to Y,u(t)\mapsto\Delta^2u(t-1)$,$\tilde{N}:X\mapsto Y,u\mapsto-\tilde{f}(\cdot,u(\cdot),\lambda)$.

当$\lambda\in[0,1]$且式(2),(3),(4)依赖于$\partial\Omega_2$时,我们来证明(16)是无解的. 如若不然,假设对于$\lambda\in[0,1]$及式(16)的解$u\in\overline{\Omega}_2$,存在$t_1\in[0,T+1]$使得

$$\max\{u(t):t\in[0,T+1]\}=u(t_1)=p.$$

现在我们分两种情况讨论:

情况1　如果$t_1\in[1,T]$,那么

$$\Delta u(t_1)\leqslant0,\Delta^2u(t_1-1)\leqslant0.$$

另一方面$\Delta^2u(t_1-1)=\lambda f(t_1,p)+(1-\lambda)p>0$.

因此矛盾.

情况2　如果$t_1=0,T+1$,那么从式(k)与情况1的证明中,我们可以得出矛盾. 现在,我们只讨论(1)与(2),其他的类似可证. 在(2)中,我们可以看出$u(0)=u(1)$,$u(T)=u(T+1)$. 如果$t_1=0$,那么我们可得

$$u(1)=\max\{u(t):t\in[0,T+1]\}.$$

剩余部分的证明与情况1相同. 如果$t=T+1$,利用条件$u(T+1)=u(T)$即可.

假设$\min\{u(t):t\in[0,T+1]\}=-P$,我们可类似讨论.

所以对于$\forall\lambda\in[0,1]$,度量$d_L(L+\tilde{N}(\cdot,\lambda),\Omega_2)$是适定的. 通过在一个同伦下度的不变性,我们可得

$$d_L(L+\tilde{N}(\cdot,0),\Omega_2)=d_L(L+\tilde{N}(\cdot,1),\Omega_2).$$

因为$Lu+\tilde{N}(u,0)=\Delta^2u(t-1)-u(t)$,我们得

$$d_L(L+\tilde{N}(\cdot,0),\Omega_2)=1.$$

由等式$\tilde{N}(\cdot,1)=N$,可得引理1.

引理2　对于问题(1),(5)及对应的方程(12). 令f满足引理1的假设条件并且有[按照(11)]

$$g_1(-p,0)\geqslant0,g_1(p,0)\leqslant0, \tag{17}$$

$$g_2(-p,0)\leqslant0,g_2(p,0)\geqslant0. \tag{18}$$

那么有

$$d_L(L+N,\Omega_3)=1,$$

式中,$\Omega_3=\{u\in X\,\|\,u(t)|<p$,对于$t\in[0,T+1]\}$.

证明 引理 2 的证明可通过在引理 1 的证明基础上作一点修改得到:

令

$$\tilde{g}_i(u,v,\lambda)=\lambda g_i(u,v)+(1-\lambda)u(-1)^i,i=1,2,$$
$$\mathrm{dom}\ L=X,$$
$$L:\mathrm{dom}\ L\to Y\times\mathbf{R}^2,u\mapsto(\Delta^2u(t-1),0,0).$$
$$\tilde{N}(\cdot,\lambda):X\to Y\times\mathbf{R}^2,$$
$$u\to(-\tilde{f}(\cdot,u(\cdot),\lambda),\tilde{g}_1(u(0),\Delta u(0),\lambda),\tilde{g}_2(u(T+1),\Delta u(T),\lambda)),$$

下面证明对于 $\lambda\in[0,1]$,(12)的解不属于$\partial\Omega_3$. 假设存在一个 $\lambda\in[0,1]$以及(12)的一个解 $u\in\overline{\Omega}_3$ 满足

$$\max\{u(t):t\in[0,T+1]\}=u(t_1)=p,$$

那么对于 $t\in[1,T]$,类似于引理 1 的证明可得矛盾. 如果 $t_1=0$ 且 $\Delta u(0)<0$,那么通过式(17)及 g_1 上的假设,可得

$$0=g_1(u(0),\Delta u(0))=g_1(p,\Delta u(0))<g_1(p,0)\leqslant 0,$$

因此矛盾. 如果 $t_1=T+1$ 且 $\Delta u(T)>0$,那么我们利用式(18),类似可得

$$\min\{u(t):t\in[0,T+1]\}\neq -P.$$

因此,假设 $u\in\overline{\Omega}_3$,在$[0,T+1]$上有$|u(t)|<p$.

所以对于$\forall\lambda\in[0,1]$,度 $d_L(L+\tilde{N}(\cdot,\lambda),\Omega_3)$是适定的,和引理 1 的证明类似,我们证得引理 2.

定理 1 的证明

令

$$h(t,u)=\begin{cases}f(t,\sigma_2(t)), & u>\sigma_2(t),\\ f(t,u), & \sigma_1(t)\leqslant x\leqslant\sigma_2(t),\\ f(t,\sigma_1(t)), & u<\sigma_1(t),\end{cases}$$

$$f^*(t,u)=\begin{cases}h(t,u)+M, & x\geqslant r+1,\\ h(t,u)+(u-r)M, & r<x<r+1,\\ h(t,u), & -r\leqslant u\leqslant r,\\ h(t,u)+(u+r)M, & -r-1<u<-r,\\ h(t,u)-M, & u\leqslant -r-1,\end{cases}$$

且

$$\Omega_2^*=\{u\in X\,\|\,u(t)|<r+1,\quad\forall t\in[0,T+1]\},\text{其中}$$
$$r=\|\sigma_1\|_X+\|\sigma_2\|_X,$$
$$M=\max_{t\in[0,T+1]}\sum_{i=1}^{2}|f(t,\sigma_i(t))|+1.$$

那么我们可得

$$f^*(t,r+1)=h(t,r+1)+M=f(t,\sigma_2(t))+M>0,f^*(t,-r-1)=h(t,-r-1)-M=f(t,\sigma_1(t))-M<0,$$

这表明f^*满足引理 1 的假设,其中的常数换成 $r+1$.

因此,对于 $k\in\{2,3,4\}$,我们有

$$d_L(L+N^*,\Omega_2^*)=1,\tag{19}$$

式中,L 满足引理 1,且

$$N^*:X\to Y,u\mapsto -f^*(\cdot,u(\cdot)).$$

对于 $k=5$,我们令

$$\varphi_i(u,v)=\begin{cases}g_i(\sigma_2(t),v), & u>\sigma_2(t),\\ g_i(u,v), & \sigma_1(t)\leqslant u\leqslant\sigma_2(t),\\ g_i(\sigma_1(t),v), & u<\sigma_1(t),\end{cases}$$

$$g_i^*(u,v)=\begin{cases}\varphi_i(u,v)+m(-1)^i, & u\geqslant r+1,\\ \varphi_i(u,v)+(u-r)m(-1)^i, & r<u<r+1,\\ \varphi_i(u,v), & -r<u<r+1,\\ \varphi_i(u,v)+(u+r)m(-1)^i, & -r-1<u<-r,\\ \varphi_i(u,v)-m(-1)^i, & u\leqslant -r-1,\end{cases}$$

这里

$$m=\max\left\{\sum_{i,j=1}^{2}|g_i(\sigma_j(t),0)|:t\in[0,T+1]\right\}.$$

令 L 是满足引理 2 的常数,且 $H^*:X\to Y\times\mathbf{R}^2,u\mapsto(-f^*(\cdot,u(\cdot)),g_1^*(u(0)),g_2^*(u(T+1),\Delta u(T)))$.

令

$$\Omega_3^*=\{u\in X:|u(t)|<r+1\},$$

式中,$t\in[0,T+1]$. 由于 g_1^* 和 g_2^* 分别满足(17)和(18),只需将其中的常数换成 $r+1$,从引理 2 得到

$$d_L(L+H^*,\Omega_3^*)=1. \tag{20}$$

我们来看下面两个结论:

(*)当 $k\in\{2,3,4\}$ 时,方程 $(L+N^*)u=0$ 的每一个解 u,都有 $u\in\Omega_2^*\Rightarrow u\in\Omega^1$;

(**)当 $k=5$ 时,方程 $(L+H^*)u=0$ 的每一个解 u,都有 $u\in\Omega_3^*\Rightarrow u\in\Omega_1$.

我们用反证法来证明以上两个结论.令 $v_2(t)=u(t)-\sigma_2(t)$, $v_1(t)=\sigma_1(t)-u(t)$.

则当 $i\in\{1,2\}$,我们有

$$\max\{v_i(t):t\in[0,T+1]\}=v_i(t_0)\geqslant 0.$$

(*)当 $k\in\{2,3,4\}$ 时,证明分为以下两个步骤:

第一步. 如果 $t_0\in[1,T]$,那么有

$$\Delta v_i(t_0)\leqslant 0,\Delta^2 v_i(t_0-1)\leqslant 0.$$

另一方面,当 $i=2$ 时,有

$$\Delta v_2(t_0-1)=\Delta^2 u(t_0-1)-\Delta^2\sigma_2(t_0-1)=f^*(t_0,u(t_0))-\Delta^2\sigma_2(t_0-1)>0.$$

第二步. 如果 $t_0=0,T+1$, 那么结合式(2)~(4)和第一步的证明,我们得出矛盾.

类似的,当 $i=1$ 时,对所有的 $t\in[0,T+1]$,我们有 $\sigma_1(t)<u(t)$.

(**)如果 $k=5$,证明分以下两个步骤.

第一步:如果 $t_0\in[1,T]$,那么我们可以得到和(*)一样的矛盾.

第二步:如果 t_0 是$[0,T+1]$的两个边界点,讨论可以分为两种情况.(这里我们只讨论 $i=2$ 和 $t_0=0$ 的情况,其他情况类似.)

情形 1　如果 $\Delta v_2(0)=0$,那么 $v_2(0)=v_2(1)$,也就是说,$v_2(1)=\max(v_2(t):t\in[0,T+1])$. 应用第一步的结论即可证明.

情形 2　如果 $\Delta v_2(0)<0$,我们有

$$g_1^*(u(0),\Delta u(0))\leqslant g_1(\sigma_2(0),\Delta u(0))<g_1(\sigma_2(0),\Delta\sigma_2(0))\leqslant 0,$$

当 $i=1$ 时,我们有

$$g_1^*(u(0),\Delta u(0))\geqslant g_1(\sigma_1(0),\Delta u(0))>g_1(\sigma_1(0),\Delta\sigma_1(0))\geqslant 0,$$

两式矛盾.

所以根据度的分割性,利用式(19)和(20),当 $k\in\{2,3,4\}$ 时,我们有

$$d_L(L+N^*,\Omega_1)=1,$$

当 $k=5$ 时,我们有

$$d_L(L+H^*,\Omega_1)=1.$$

由于当 $k\in\{2,3,4\}$ 时,在 $\overline{\Omega}_1$ 上,有 $N^*=N$(当 $k=5$ 时,$H^*=N$)成立. 因此定理 1 得证.

2　逆序的上解和下解

简单起见,我们假设 f 是有界的,即:

$$\exists M(0,\infty):|f(t,u)|<M,(t,u)\in[0,T+1]\times\mathbf{R}. \tag{21}$$

如果 f 是无界的,式(21)就变为增长的函数或者符号函数.

定理 2　假设 $k\in\{2,3,4\}$,式(12)是满足(1),(k)的算子方程,在条件(21)下,令 σ_1,σ_2 为(1),(k)的严格上解和下解,并且满足对所有的 $t\in[0,T+1]$,有 $\sigma_2(t)<\sigma_1(t)$,那么我们有

$$d_L(L+N,\Omega_4)=-1, \tag{22}$$

这里 $\Omega_4=\{u\in X|\max\limits_{t\in[0,T+1]}|u(t)|<A,\exists t_u\in[0,T+1]:\sigma_2(t_u)<u(t_u)<\sigma_1(t_u)\}$,且 $A\geqslant\|\sigma_1\|_X+\|\sigma_2\|_X+2(T+1)^2M$.

证明　令

$$f^*(t,u)=\begin{cases}f(t,u)+M, & u\geqslant A+1,\\ f(t,u)+(u-A)M, & A<u<A+1,\\ f(t,u), & -A\leqslant u\leqslant A,\\ f(t,u)+(u+A)M, & -A-1<u<-A,\\ f(t,u)-M, & u\leqslant -A-1,\end{cases}$$

$$\Omega=\{u\in X\|\,|u\|_X<A+1\}.$$

将(21)和(15)中的常数换成 $2M$ 和 $A+1$,可知 f^* 满足(21)和(15). 根据引理 1,有

$$d_L(L+F^*,\Omega)=1, \tag{23}$$

这里 $F^*:X\to Y,u\mapsto -f^*(\cdot,u(\cdot))$.

现在考虑两个数对 $-A-1,\sigma_2(t)$ 和 $\sigma_1(t),A+1$,它们是方程

$$\Delta^2u(t-1)=f^*(t,u(t)),(k). \tag{24}$$

的良序的严格的上解和下解.

因此我们可以定义以下两个集合

$$\Delta_1=\{u\in\Omega:\sigma_1(t)<u(t),\quad\forall t\in[0,T+1]\},$$

和

$$\Delta_2=\{u\in\Omega:u(t)<\sigma_2(t),\quad\forall t\in[0,T+1]\}.$$

根据定理 1,我们有

$$d_L(L+F^*,\Delta_1)=1, \tag{25}$$

和

$$d_L(L+F^*,\Delta_2)=1. \tag{26}$$

考虑集合

$$\Delta=\Omega\backslash(\overline{\Delta_1\cup\Delta_2}).$$

不难得到

$$\Delta=\{u\in\Omega:\exists\in[0,T+1],\sigma_2(t_u)<u(t_u)<\sigma_1(t_u)\}.$$

我们来证明:如果 $u\in\bar{\Delta}$ 是(24)的一个解,那么 $u\notin\partial\Delta$. 我们首先来证明 $u\notin\partial\Omega$. 这里只考虑 $k=3$ 的情形,对于情形 $k=2,4$,可以类似的讨论得到.事实上,根据(3),存在 $\xi_1\leqslant\xi_2\in[0,T+1]$ 满足 $\Delta u(\xi_1)\leqslant 0$,$\Delta u(\xi_2)\geqslant 0$. 不失一般性,假设 $\xi_1\leqslant\xi_2$.

对于 $t<\xi_1$,有

$$\Delta u(t)=\Delta u(\xi_1)-\sum_{i=t+1}^{\xi_1}\Delta^2u(i-1),$$

且

$$\Delta u(t)=\Delta u(\xi_2)-\sum_{i=t+1}^{\xi_2}\Delta^2u(i-1),$$

结合 $\Delta u(\xi_1)\leqslant 0,\Delta u(\xi_2)\geqslant 0$,可知

$$-\sum_{i=t+1}^{\xi_2}\Delta^2 u(i-1)\leqslant \Delta u(t)\leqslant -\sum_{i=t+1}^{\xi_1}\Delta^2 u(i-1),$$

$$|\Delta u(t)|\leqslant 2(T+1)M,t\in[0,T].$$

因此当 $t\geqslant t_u$ 时,由 Δ 的定义可知

$$\sum_{i=t_u+1}^{t}\Delta u(i-1)+\sigma_1(t_u)\leqslant u(t)=\sum_{i=t_u+1}^{t}\Delta u(i-1)+u(t_u)\leqslant \sum_{i=t_u+1}^{t}\Delta u(i-1)+\sigma_2(t_u),$$

当 $t<t_u$ 时,有

$$\sigma_1(t_u)-\sum_{i=t+1}^{t_u}\Delta u(i-1)\leqslant u(t)=u(t_u)-\sum_{i=t+1}^{t_u}\Delta u(i-1)\leqslant \sigma_2(t_u)-\sum_{i=t+1}^{t_u}\Delta u(i-1).$$

不难看出

$$|u(t)|<A,\quad t\in[0,\xi_1-1].$$

对于 $\xi_1\leqslant t\leqslant \xi_2,\xi_2<t$ 可以得到类似的结论. 因此我们有

$$\|u\|_X<A, \tag{27}$$

从而可得 $u\notin\partial\Omega$.

令 $v_2(t)=u(t)-\sigma_2(t),v_1(t)=\sigma_1(t)-u(t)$,并假设 $u\in\partial\Delta$. 那么当 $i\in\{1,2\}$ 时,我们有 $\max\{v_i(t):t\in[0,T+1]\}=v_i(t_0)=0$.这与定理 1 的证明矛盾. 因此 $u\notin\partial\Delta$,根据度数的可加性,有

$$d_L(L+F^*,\Omega)=d_L(L+F^*,\Delta_2)+d_L(L+F^*,\Delta_1)+d_L(L+F^*,\Delta).$$

根据(23),(25)和(26),我们可得

$$d_L(L+F^*,\Delta)=-1.$$

至于(27),根据度的分割性,有

$$d_L(L+F^*,\Omega_4)=-1.$$

由于在 Ω_4 上 $F^*=N$,定理 2 得证.

定理 3　假设 $k=5$. 假设 g_1 是单调非增函数,g_2 是单调非减函数,在定理 2 的其它假设条件下,如果 $A\geqslant\|\sigma_1\|_X+\|\sigma_2\|_X+(T+1)B$,其中 $B\geqslant\max\limits_{t\in[0,T]}|\Delta\sigma_2(t)|+2(T+1)M$. 那么定理 2 的结论同样成立.

证明　令

$$g_i^*(u,v)=\begin{cases}g_i(u,v)+m(-1)^i, & u\geqslant A+1,\\ g_i(u,v)+(u-A)m(-1)^i, & A<u<A+1,\\ g_i(u,v), & -A\leqslant u\leqslant A,\\ g_i(u,v)+(u+A)m(-1)^i, & -A-1<u<-A,\\ g_i(u,v)-m(-1)^i, & u\leqslant -A-1,\end{cases}$$

这里

$$m=\max\left\{\sum_{i,j=1}^{2}|g_i((A+1)(-1)^j,0)|:t\in[0,T+1]\right\}.$$

考虑定理 2 证明过程中的 f^*,定义集合

$$\Omega=\{u\in X:\max_{t\in[0,T+1]}|u(t)|<A+1\}.$$

可知 f^* 满足式(21)和(15),只需分别将其中的常数 M 和 p 换成 $2M$ 和 $A+1$ 即可. g_1^* 和 g_2^* 分别满足式(17)和(18),只需将其中的常数换成 $A+1$ 即可. 因此,如果我们令

$$H^*:X\to Y\times\mathbf{R}^2,u\mapsto(-f^*(\cdot,u(\cdot)),g_1^*(u(0),\Delta u(0)),g_2^*(u(T+1),\Delta u(T))).$$

且

$$L:X\to Y\times\mathbf{R}^2,u\mapsto(\Delta^2 u(t-1),0,0),$$

根据引理 2,有

$$d_L(L+H^*,\Omega)=1.$$

和定理 2 的证明一样,我们定义集合 Δ_1,Δ_2,Δ,那么有

$$d_L(L+H^*,\Delta_1)=1.$$

和

$$d_L(L+H^*,\Delta_2)=1.$$

接下来我们要证明的是:对于方程

$$\Delta^2 u(t-1)=f^*(t,u(t)),$$
$$g_1(u(0),\Delta u(0))=0,g_2(u(T+1),\Delta u(T))=0,$$

的任意解 u,对于 $u\in\bar{\Delta}$ 都有 $u\notin\partial\Delta$ 成立. 我们令 $v(t)=u(t)-\sigma_2(t)$. 由于 $u\in\bar{\Delta}$,则存在一个 $t_u\in[0,T+1]$ 满足 $v(t_u)\geqslant 0$. 假设对于所有的 $t\in[0,T]$ 有 $\Delta v(t)>0$. 那么 $v(T+1)\geqslant 0$ 且 $g_2(u(T+1),\Delta u(T))>g_2(\sigma_2(T+1),\Delta\sigma_2(T))\geqslant 0$,矛盾. 如果当 $t\in[0,T]$ 时,有 $\Delta v(t)<0$,那么 $v(0)\geqslant 0$,这与 $g_1(u(0),\Delta u(0))<0$ 矛盾.

因此,对于 $t_0\in[0,T-1]$ 有 $\Delta v(t_0)\Delta v(t_0+1)\leqslant 0$,不失一般性,假设 $\Delta v(t_0)\leqslant 0,\Delta v(t_0+1)\geqslant 0$,即

$$\Delta u(t_0)\leqslant\Delta\sigma_2(t_0),\Delta u(t_0+1)\geqslant\Delta\sigma_2(t_0+1).$$

(类似的,当 $t_1\in[0,T-1]$ 时,可证明 $\Delta u(t_1)\leqslant\Delta\sigma_1(t_1),\Delta u(t_1+1)\geqslant\Delta\sigma_1(t_1+1)$.)

对于 t,如果 $t\leqslant t_0$,有

$$\Delta\sigma_2(t_0+1)-\sum_{i=t+1}^{t_0+1}\Delta^2 u(i-1)\leqslant\Delta u(t)\leqslant\Delta\sigma_2(t_0)-\sum_{i=t+1}^{t_0}\Delta^2 u(t-1),$$

如果 $t>t_0$,那么

$$\Delta\sigma_2(t_0+1)-\sum_{i=t+1}^{t_0+1}\Delta^2 u(i-1)\leqslant\Delta u(t)\leqslant\Delta\sigma_2(t_0)-\sum_{i=t+1}^{t_0}\Delta^2 u(i-1),$$

所以对于 $t\in[0,T+1]$,有

$$|\Delta u(t)|\leqslant\max_{t\in[0,T]}|\Delta\sigma_2(t)|+2(T+1)M,$$

则不难看出,对于 $t\in[0,T+1]$,有 $|u(t)|<A$.

因此 $u\notin\partial\Omega$. 假设 $u\in\partial\Delta$,令

$$v_i(t)=(u(t)-\sigma_i(t))(-1)^i,\quad i\in\{1,2\}.$$

那么对 $i\in\{1,2\}$,我们能够找到一个 $t_0\in[0,T+1]$,使得

$$\max\{v_i(t):t\in[0,T+1]\}=v_i(t_0)=0.$$

和定理 1 类似,我们可以得出一个矛盾. 由于已经有 $u\in\bar{\Delta}\Rightarrow u\in\Omega_4$,我们可采用与定理 2 一样的方法证明,只需要将其中的 F^* 换成 H^* 即可.

推论 1　假设 $k\in\{2,3,4,5\}$. 若定理 1 中 σ_1 和 σ_2 是非严格的,那么或者问题(1),(k),$k\in\{2,3,4,5\}$ 在 $\partial\Omega_1$ 上有一个解,或者条件(14)是成立的.

证明　假设定理 1 所有假设均成立,但 σ_1,σ_2 是非严格的. 我们选择 $\mu_0\in[0,\mu_0]$,对于 $\mu\in[0,\mu_0]$,令

$$\varepsilon(t,\mu,u)=\begin{cases}\mu, & u\geqslant\sigma_2(t),\\ \mu\dfrac{2u-\sigma_2(t)-\sigma_1(t)}{\sigma_2(t)-\sigma_1(t)}, & \sigma_1(t)<u<\sigma_2(t),\\ -\mu, & u\leqslant\sigma_1(t),\end{cases}$$

$$f_\mu(t,u)=f(t,u)+\varepsilon(t,\mu,u).$$

那么对于 $\forall\mu\in(0,\mu_0]$,σ_1 和 σ_2 是问题

$$\Delta^2 u(t-1)=f_\mu(t,u(t)),(1.k).\tag{28}$$

的严格的下解和上解.

如果我们定义算子:当 $\mu\in[0,\mu_0]$

$$N_\mu:X\to Y,u\mapsto -f_\mu(\cdot,u(\cdot)).$$

那么,由定理 1,我们可得

对于每个 $\mu\in(0,\mu_0]$,$d_L(L+N_\mu,\Omega_1)=1$.

假设在 $\partial\Omega_1$ 上,$(L+N)\mu=0$ 没有解. 那么在一个同伦下利用度的不变性及 $N_0=N$,我们得式(14).

类似地,我们可得下面推论.

推论 2　假设 $k\in\{2,3,4,5\}$. 如果在定理 2,定理 3 中 σ_1,σ_2 是不严格的,那么或者在 $\partial\Omega_4$ 上问题(1),(k),$k\in\{2,3,4,5\}$ 有一个解,或者条件(22)上是成立的.

证明　我们在推论 1 的证明基础上仅作一点修正. 我们选择 $\mu_0\in(0,\infty)$ 使得

$$|f(t,u)+\mu_0|<M,\quad (t,u)\in[1,T]\times\mathbf{R}.$$

那么对于任意 $\mu\in(0,\mu_0]$,对于函数 $\varepsilon(t,\mu,u)$,我们只改变公式中 σ_1 和 σ_2.

3　存在性结果

由定理 1,定理 2,定理 3 和推论 1,推论 2,利用极限过程,可得问题(1)-(5)存在性的结论.

定理 4　假设 $k\in\{2,3,4,5\}$. 当 $\forall t\in[0,T+1]$,$\sigma_1(t)\leqslant\sigma_2(t)$ 时,令(1),(k)的下解和上解分别是 σ_1 和 σ_2. 那么在 $\bar{\Omega}_1$ 上问题(1),(k)至少存在一个解,其中 Ω_1 是定理 1 中的集合.

定理 5　假设 $k\in\{2,3,4,5\}$. 令 $k=5$ 时,(21)成立且 σ_1 和 σ_2 是(1),(k)的下解和上解,其中 $\sigma_2(t)\leqslant\sigma_1(t)$,$\forall t\in[0,T+1]$. 对于 $k=5$,我们假设在第一个讨论中 g_1 是非增的,g_2 是非减的. 那么当 $k=2,3,4$ 时,在 $\bar{\Omega}_4$ 上(1),(k)式至少有一个解,Ω_4 是定理 2 中的集合. $k=5$ 时,Ω_4 是定理 3 中的集合.

注释　若仔细检查,通过定理 1,定理 2 和定理 3 可得(1),(k)的多解性.

[参考文献]

[1]　IRENA R. Upper and lower solutions and topological degree[J]. J Math Anal Appl,1999,234:311-327.

[2]　YULIAN A. Existence of solutions for a three-point boundary value problem at resonance[J]. Nonlinear analysis,2006,65:1633-1643.

[3]　FANGFEI L,MEI J,XIPING L,et al. Existence and uniqueness of solutions of second-order three-point boundary value problems with upper and lower solutions in the reversed order[J]. Nonlinear analysis,2007,68:2381-2383.

[4]　CABADA A A,MINH′OS F M. Fully nonlinear fourth-order equations with funtions[J]. J Math Anal Appl,2007,340:239-251.

[5]　IRENA RR,CHRISTOPHER C T. Existence of non-spurious solutions to discrete Dirichlet problems with lower and upper solutions[J]. Nonlinear analysis,2007,67:1236-1245.

[6]　TIAN Y,TISDELL,CHRISTOPHER C W. The method of upper and lower solutions for discrete BVP on infinite intervals[J]. Journal of difference equations and applications,2011,17-3:267-278.

[7]　ZHAO Y L,CHEN H B,XU C J. Existence of multiple solutions for three-point boundary-value problems on infinite intervals in Banach spaces[J]. Electronic journal of differential equations,2012,44:1-11.

[8]　HE Z M,ZHANG X M. Monotone iterative technique for first order impulsive difference equations with periodic boundary conditions[J]. Applied mathematics and computation,2004,156:605-620.

[9]　CABADA A,OTERO-ESPINAR V. Fixed sign solutions of second-order difference equations with neumann boundary conditions[J]. Computers and mathematics with applications,2003,45:1125-1136.

[10]　LI Y X. Maximum principles and the method of upper and lower solutions for time-periodic problems of the telegraph equations[J]. J Math Anal Appl,2007,327:997-1009.

[11]　WANG H Z,RICHARD M,TIMONEY. Upper and lower solutions method for second order boundary value problems with delay[J]. Acta mathematica sinica,2010,3:489-494.

[12]　YANG J,SONG N N,JIN Y.Upper and lower solution method for fourth order four point boundary value problem on time scales[J]. Mathematics in practice and theory,2013,21:205-211.

[责任编辑:陆炳新]