第 42 卷第 2 期 南京师大学报(自然科学版) Vol. 42 No. 2
2019 年 6 月 JOURNAL OF NANJING NORMAL UNIVERSITY(Natural Science Edition) June,2019

doi:10.3969/j.issn.1001-4616.2019.02.009

范畴 Ω-*Cat* 上的模结构

赵 娜[1,2],鲁 静[2]

(1.长治医学院数学教研室,山西 长治 046000)
(2.陕西师范大学数学与信息科学学院,陕西 西安 710062)

[**摘要**] 本文构造了范畴 Ω-*Cat* 上的一个模,并且证明了范畴 Ω-*Poset* 与范畴 Ω-Cat^T 同构.

[**关键词**] Ω-范畴,模,反射子范畴

[**中图分类号**]O154.1 [**文献标志码**]A [**文章编号**]1001-4616(2019)02-0057-04

The Monad of Ω-*Cat* Category

Zhao Na[1,2],Lu Jing[2]

(1.Mathematics Staff Room,Changzhi Medical College,Changzhi 046000,China)
(2.College of Mathematics and Information Science,Shaanxi Normal University,Xi'an 710062,China)

Abstract:In this paper,we construct a monad of Ω-*Cat* category,and prove that Ω-*Poset* category is isomorphic to Ω-Cat^T category.

Key words:Ω-category,monad,reflective subcategory

Domain 理论是计算机程序语言指称语义学的数学基础,关注的是信息的逼近和收敛,但只能定性地描述信息间的逼近关系,无法为计算机程序语言的语义表示提供更加精细的量化模型. Ω-范畴[1]用 Ω 中的一个元素定量地描述两个元素之间的关系,可以看作 Ω-值的序结构,从而为计算机程序语言的语义提供了量化模型,成为量化 Domain 理论中主要的研究对象. 文[2]对 Ω-范畴的完备性、连续性及完全分配性进行了研究,详细刻画了完备 Ω-范畴及完全分配 Ω-范畴的子对象、商对象及乘积对象. 文[3]证明了连续 Ω-范畴是有限闭的,并证明了代数 Ω-范畴是 Cartesian 闭的. 文[4-6]分别研究了范畴 Ω-*Cat* 的完备性、极限与余极限以及 Cartesian 闭性. 基于 Ω-范畴具有范畴论和序理论的双重意义,本文在文[1-7]的基础上,构造了范畴 Ω-*Cat* 上的模,证明了范畴 Ω-*Poset* 与范畴 Ω-Cat^T 同构.

1 预备知识

定义 1[8] 设 Ω 是一个完备格. 若:

(1)$(\Omega, *)$是以 e 为单位元的交换半群;

(2)$\forall p\in\Omega, p*(-):\Omega\to\Omega$ 是保序映射,且有右伴随 $p\to(-):\Omega\to\Omega$,即 $\forall p,q,r\in\Omega, p*q\leqslant r\Leftrightarrow q\leqslant p\to r$,

则称$(\Omega, *, e)$是一个交换的单位 Quantale.

在本文中,若无特殊说明,Ω 均指交换的单位 Quantale.

定义 2[1] 设$(\Omega, *, e)$是一个交换的单位 Quantale,X 是集合,R 是 $X\times X$ 到 Ω 的映射. 若满足:

(1)$\forall x\in X, e\leqslant R(x,x)$;

(2)$\forall x,y,z\in X, R(x,y)*R(y,z)\leqslant R(x,z)$,

则称(X,R)是一个 Ω-范畴.

设(X,R)是一个 Ω-范畴,$x,y\in X, R(x,y)\geqslant e, R(y,x)\geqslant e$,则称 x,y 同构,记作 $x\cong y$. 若 X 中的任意两个不同的元素都不同构,则称 X 是骨架化的,或称为 Ω-偏序集.

收稿日期:2018-09-16.
基金项目:国家自然科学基金(11601302).
通讯联系人:鲁静,博士研究生,研究方向:格上拓扑与模糊推理. E-mail:lujing0926@126.com

定义 3[1]　设(X,R),(Y,S)均是 Ω–范畴,$f:(X,R)\to(Y,S)$是映射. 若$\forall x,y\in X,R(x,y)\leqslant S(f(x),f(y))$,则称映射 f 是一个 Ω–函子.

定义 4[7]　设(X,R)是一个 Ω–范畴,$D\in\Omega^X$. 若 D 满足:

(1)$\bigvee\limits_{x\in X}D(x)\geqslant e$;

(2)$\forall x,y\in X,D(x)*D(y)\leqslant\bigvee\limits_{z\in X}D(z)*R(x,z)*R(y,z)$,

则称 D 是定向的.

若 D 还是 Ω–下集即 $D=\downarrow D$,则称 D 是 Ω–理想. 其中$\downarrow D(x)=\bigvee\limits_{y\in X}D(y)*R(x,y)$. 记 Ω–范畴 X 的所有定向 Ω–子集为 $D(X)$,所有 Ω–理想为 $I(X)$.

定义 5[7]　设(X,R)是一个 Ω–范畴,$\Phi\in\Omega^X$,$x_0\in X$. 若$\forall y\in X$,都有 $R(x_0,y)=\bigwedge\limits_{x\in X}\Phi(x)\to R(x,y)$,则称 x_0 为 Φ 的并,记作$\cup\Phi$. 若 Ω–范畴 X 的所有定向 Ω–子集的并都存在,则称 X 是定向完备的.

定义 6[9]　设(X,R)是定向完备的 Ω–范畴,$x\in X$. 定义$\Downarrow x:X\to\Omega$ 为$\forall y\in X$,$\Downarrow x(y)=\bigwedge\limits_{D\in D(X)}R(x,\cup D)\to(\bigvee\limits_{z\in X}D(z)*R(y,z))=\bigwedge\limits_{I\in I(X)}R(x,\cup I)\to I(y)$. 若$\forall x\in X$,$\Downarrow x\in D(X)$且 $x=\cup\Downarrow x$,则称定向完备 Ω–范畴 X 是连续的.

记以 Ω–范畴为对象,Ω–函子为态射的范畴为 Ω-Cat;以 Ω–偏序集为对象,Ω–函子为态射的范畴为 Ω-$Poset$;以连续 Ω–范畴为对象,Ω–函子为态射的范畴为 Ω-$CONT$;以连续 Ω–偏序集为对象,Ω–函子为态射的范畴为 Ω-DOM.

定理 1[10]　设 D 是范畴 C 的满子范畴. 下列条件等价:

(1)D 是 C 的反射子范畴;

(2)对$\forall c\in ob(C)$,$\exists d\in D$ 和态射 $r:c\to d$ 满足下面的万有性质:$\forall d_1\in ob(D)$和 C 中态射 $f:c\to d_1$,存在 D 中唯一的态射 $f_1:d\to d_1$ 使得 $f=f_1\circ r$.

2　主要结果

定义 7[10]　范畴 C 上的一个模(T,η,μ)是由函子 $T:C\to C$ 及两个自然变换 $\eta:1_c\to T$ 和 $\mu:TT\to T$ 组成的三元组,且满足下面的图表可交换:

$$\begin{tikzcd}
TTT \arrow[r, "T\mu"] \arrow[d, "\mu T"'] & TT \arrow[d, "\mu"] \\
TT \arrow[r, "\mu"] & T
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
TT \arrow[dr, "\mu"] & T \arrow[l, "\eta T"'] \arrow[d] \\
T \arrow[u, "T\eta"] \arrow[r] & T
\end{tikzcd}$$

定理 2　Ω 在 Ω–范畴上的作用形成范畴 Ω-Cat 上的一个模.

证明　首先,Ω 是一个交换的单位 Quantale,令 $\Omega(x,y)=x\to y$,则易验证$(\Omega,\to)$是一个 Ω–范畴. 其次,考虑积函子 $T=Q\times\_:\Omega\text{-}Cat\to\Omega\text{-}Cat$ 和自然变换 $\eta:1_{\Omega\text{-}Cat}\to T(\eta_A:a\mapsto(e,a))$,$\mu:TT\to T(\mu_A:(m,(n,a)\mapsto(m*n,a))$(具体对应关系见下图),则如此定义的$(T,\eta,\mu)$是范畴 Ω-Cat 上的一个模.

$$\begin{tikzcd}
(m,(n,(p,a))) \arrow[r, "T\mu"] \arrow[d, "\mu T"'] & (m,(n*p,a)) \arrow[d, "\mu"] \\
(m*n,p,a)) \arrow[r, "\mu"] & (m*n*p,a)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\begin{matrix}(e,(m,a))\\(m,(e,a))\end{matrix} \arrow[dr, "\mu"] & (m,a) \arrow[l, "\eta T"'] \arrow[d] \\
(m,a) \arrow[u, "T\eta"] \arrow[r] & (e*m,a)=(m*e,a)=(m,a)
\end{tikzcd}$$

注 1　若$(\Omega,\rightarrow)$是连续的 Ω-范畴,则 Ω 在连续的 Ω-范畴上的作用亦可形成范畴 Ω-$CONT$ 上的一个模.

例 1　范畴 Ω-Cat 是 Cartesian 闭范畴[6],即给定范畴 Ω-Cat 中的任一对象(X,R),Ω-值函数空间函子$(-)^{(X,R)}:\Omega\text{-}Cat\rightarrow\Omega\text{-}Cat$ 是 Ω-值积函子$(-)\times(X,R):\Omega\text{-}Cat\rightarrow\Omega\text{-}Cat$ 的右伴随. 考虑函子 $T=(-)^{(X,R)}\circ(-)\times(X,R):\Omega\text{-}Cat\rightarrow\Omega\text{-}Cat$,伴随单位 $\eta:1_{\Omega\text{-}Cat}\rightarrow T$ 及自然变换 $\mu=(-)^{(X,R)}\circ\varepsilon\circ(-)\times(X,R):TT\rightarrow T$,其中 $\varepsilon:(-)^{(X,R)}\circ(-)\times(X,R)\rightarrow 1_{\Omega\text{-}Cat}$是伴随余单位,由 η,ε 的万有性质及 μ 的自然性知,(T,η,μ)是范畴 Ω-Cat 上的一个模.

任意一对伴随函子$(F,G,\eta,\varepsilon):C\rightarrow D$ 都可以如例 1 一样“自然地”确定一个模($T=GF,\eta,\mu=G\varepsilon F$). 反过来,范畴 C 上的任意一个模(T,η,μ)也可由一对伴随函子$(F^T,G^T,\eta^T,\varepsilon^T):C\rightarrow C^T$“自然地”确定[10].

定义 8[9]　设 $T=(T,\eta,\mu)$是范畴 C 上的一个模. 若 $A\in ob(C)$,$h:T(A)\rightarrow A$ 是满足下面图表交换的态射:

$$
\begin{tikzcd}
TT(A) \arrow[r, "\eta T"] \arrow[d, "\mu A"'] & T(A) \arrow[d, "h"] \\
T(A) \arrow[r, "h"'] & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\eta A"] \arrow[dr] & T(A) \arrow[d, "h"] \\
 & A
\end{tikzcd}
$$

称序对(A,h)是一个 T 代数. T 代数(A,h)与(B,r)之间的一个态射 $f:(A,h)\rightarrow(B,r)$是指 C 中态射 $f:A\rightarrow B$ 满足 $f\circ h=r\circ T(f)$. 全体 T 代数构成一个范畴,称为 Eilenberg-Moore 范畴,记作 C^T. 范畴 C^T 到范畴 C 存在一个遗忘函子 $G^T:C^T\rightarrow C,(f:(A,h)\rightarrow(B,r))\mapsto(f:A\rightarrow B)$.

例 2　考虑定理 2 中范畴 Ω-Cat 上的模. 此时一个 T 代数是一个 Ω-范畴 A 上满足 $h(m,h(n,a))=h(m*n,a)$,$h(e,a)=a$ 的一个“结构”映射 $h:\Omega\times A\rightarrow A$. 若将 $h(m,a)$记作 $m*a$,则此 T 代数是带有半群结构的 Ω-范畴 Ω 对 Ω-范畴 A 的作用. 将其对应的 Eilenberg-Moore 范畴记作 Ω-Cat^T. 类似地,考虑范畴 Ω-$CONT$ 上的模,将其对应的 Eilenberg-Moore 范畴记作 Ω-$CONT^T$.

Eilenberg-Moore 范畴 C^T 与范畴 D 之间存在唯一函子 $K:D\rightarrow C^T$ 满足条件:$G^TK=G,KF=F^T$. 若函子 K 是一个同构,则称函子 G 是可模的.

引理 1[10]　设 D 是 C 的反射子范畴,则包含函子 $G:D\rightarrow C$ 是可模的.

命题 1　范畴 Ω-$Poset$ 是范畴 Ω-Cat 的反射子范畴.

证明　首先,范畴 Ω-$Poset$ 是范畴 Ω-Cat 的满子范畴.

其次,对任意 Ω-范畴(X,R),$\forall x\in X$,定义$[x]=\{y\in X\mid x\cong y\}$,$Y=\{[x]\mid x\in X\}$,$S([x],[y])=R(x,y)$,则$(Y,S)$是 Ω-偏序集. 定义态射 $r:(X,R)\rightarrow(Y,S)(x\mapsto[x])$,易验证 r 是 Ω-函子. 对于任意 Ω-偏序集(Z,T)及 Ω-函子 $f:(X,R)\rightarrow(Z,T)$,定义态射 $f_1:(Y,S)\rightarrow(Z,T)([y]\mapsto f(y))$. $\forall[x],[y]\in Y$,由 f 是 Ω-函子及 Y 的定义知 $S([x],[y])=R(x,y)\leqslant T(f(x),f(y))$,故 f_1 是 Ω-函子. $\forall x\in X$,$f(x)=f_1(r(x))$,因此 $f=f_1\circ r$. 又因为 r 是满态射,则 f_1 唯一.

综上所述,范畴 Ω-$Poset$ 是范畴 Ω-Cat 的反射子范畴.

设(X,R)是 Ω-范畴,$Y=\{[x]\mid x\in X\}$,由命题 1 的证明可知(Y,S)是 Ω-偏序集. $I\in I(X)$,定义$[I]:Y\rightarrow\Omega$ 如下:$\forall[x]\in Y$,$[I]([x])=I(x)$,则$[I]\in I(Y)$. 因此,若(X,R)是定向完备 Ω-范畴,则(Y,S)是定向完备 Ω-偏序集,且 $\forall[I]\in I(Y)$,$\cup[I]=[\cup I]$.

若$[I]\in I(Y)$,则 $I\in I(X)$. 因此

$$\Downarrow[x]([y])=\bigwedge_{[I]\in I(Y)}S([x],\cup[I])\rightarrow[I]([y])=\bigwedge_{[I]\in I(Y)}R(x,\cup I)\rightarrow I(y)=\bigwedge_{I\in I(X)}R(x,\cup I)\rightarrow I(y)=\Downarrow x(y).$$

特别地,若(X,R)是连续 Ω-范畴,则$\Downarrow[x]\in D(Y)$且$\cup\Downarrow[x]=[x]$. 所以(Y,S)是连续 Ω-偏序集.

由命题 1,我们可得如下推论.

推论1　范畴 Ω-DOM 是范畴 Ω-$CONT$ 的反射子范畴.

由引理1、命题1、推论1可得

定理3　范畴 Ω-$Poset$ 与范畴 Ω-Cat^T 同构.

推论2　范畴 Ω-DOM 与范畴 Ω-$CONT^T$ 同构.

[参考文献]

[1] WAGNER K R. Solving recursive domain equations with enriched categories[D]. Pittsburgh:Garnegie Mellon University,1994.

[2] 赖洪亮. Ω-范畴序结构性质的研究[D]. 成都:四川大学,2007.

[3] 苏淑华. Ω-范畴在量化 Domain 理论中的应用研究[D]. 长沙:湖南大学,2014.

[4] 耿俊,汤建钢,聂晓艳. 范畴 Ω-Cat 的完备性[J]. 模糊系统与数学,2012,26(2):147-151.

[5] 耿俊,汤建钢,聂晓艳. 范畴 Ω-Cat 的极限和余极限[J]. 模糊系统与数学,2012,26(4):90-93.

[6] 耿俊,汤建钢. 范畴 Ω-Cat 的函数空间及其性质[J]. 模糊系统与数学,2014,28(5):71-75.

[7] LAI H,ZHANG D. Complete and directed complete Ω-categories[J]. Theoretical computer science,2007,388:1-25.

[8] ROSENTHAL K I. Quantales and their applications[M]. New York:Longman Scientific and Technical,1990.

[9] YAO W. Quantitative domain via fuzzy sets:part Ⅰ:continuity of fuzzy directed-complete poset[J]. Fuzzy sets and systems,2010,161:973-987.

[10] 贺伟. 范畴论[M]. 北京:科学出版社,2006.

[责任编辑:陆炳新]

(上接第56页)

[8] BRIAN G L. Maximum-likelihood estimation for hidden Markov models[J]. Stochastic processes and their applications,1992,40:127-143.

[9] SUN Q,LIM C C,LIU F. Maximum likelihood state estimation for Markov jump systems with uncertain mode-dependent delays[J]. Journal of the Franklin institute,2016,353:594-614.

[10] 张虎,胡淑兰. 马尔可夫转换模型的极大似然估计的算法[J]. 统计与决策,2011,6:26-27.

[11] RICHARD Z,ZHOU M C. Petri nets and industrial applications:a tutorial[J]. IEEE transactions on industrial electronics,1994,41(6):567-583.

[12] PHUC D V,ANNE B,CHRISTOPHE B. Reliability importance analysis of Markovian systems at stead state using perturbation analysis[J]. Reliability engineering and system safety,2013,93(11):1605-1615.

[13] 荣腾中,肖智. 高阶马尔可夫链平稳分布的存在唯一性[J]. 系统工程理论与实践,2013,33(8):2015-2020.

[14] MEDER Z Z,FLESCH J,PEETERS R. Optimal choice for finite and infinite horizons[J]. Operations research letters,2012,40(6):469-474.

[15] MACDONALD I,ZUCCHINI W. Hidden Markov and other models for discrete-valued time series[M]. London:Chapman and Hall,1997.

[16] CHING W K,MICHAEL K N. Markov chains:models,algorithms and applications[M]. New York:Publications of the American Statistical Association,2006.

[17] 刘克,曹平. 马尔可夫决策过程理论与应用[M]. 北京:科学出版社,2015.

[责任编辑:陆炳新]