第 42 卷第 4 期 南京师大学报(自然科学版) Vol. 42 No. 4
2019 年 12 月 JOURNAL OF NANJING NORMAL UNIVERSITY(Natural Science Edition) Dec,2019

doi:10.3969/j.issn.1001-4616.2019.04.003

由 Sweedler 四维代数构造无穷小 Hopf 代数

刘任远,郑慧慧,严佳玲,张良云

(南京农业大学理学院,江苏 南京 210095)

[摘要] 本文主要由 Sweedler 四维代数及其子代数,构造无穷小 Hopf 代数及其拟三角结构.

[关键词] Sweedler 四维代数,无穷小双代数,无穷小 Hopf 代数,拟三角无穷小 Hopf 代数

[中图分类号]O153.3 [文献标志码]A [文章编号]1001-4616(2019)04-0017-08

The Construction of Infinitesimal Hopf Algebra on the Sweedler 4-Dimensional Algebra

Liu Renyuan,Zheng Huihui,Yan Jialing,Zhang Liangyun

(College of Science,Nanjing Agricultural University,Nanjing 210095,China)

Abstract:In this paper, we mainly construct infinitesimal Hopf algebra and its quasi-triangle Hopf algebra from the Sweedler 4-dimensional algebra and its subalgebras.

Key words:Sweedler 4-dimensional algebra, infinitesimal bialgebra, infinitesimal Hopf algebra, quasitriangular infinitesimal Hopf algebra

20 世纪 60 年代,拓扑学家 Hopf 在研究拓扑群的上链时引入 Hopf 代数概念. 经过半个多世纪的发展,Hopf 代数已经成为代数学领域不可分割的一部分,并且它与其他领域的联系越来越紧密,交叉研究也越来越多. 在众多 Hopf 代数例子中,除群代数和 Lie 代数的泛包络代数之外,目前公认 Sweedler 四维 Hopf 代数为最重要的一类 Hopf 代数,它是既非交换也非余交换并且维数最低的 Hopf 代数(见文献[1]). 近几年,有关 Sweedler 四维 Hopf 代数的研究甚多. 如,文献[2-3]的作者 Carnovale,Oystaeyen 等人由 Sweedler 四维 Hopf 代数构造 Brauer 群等.

无穷小双代数(infinitesimal bialgebra)概念是由 Joni 和 Rota 为了从代数学的角度刻画差分中的积分理论,于 1979 年首次引入的(见文献[4]). 无穷小双代数的基本理论及框架是 2000 年由 Aguiar 提出的. Aguiar 指出路代数是一种无穷小双代数,首次在无穷小双代数上引入 Drinfel'd 偶概念,并建立拟三角无穷小双代数与结合 Yang 方程之间的关系,并将 Hopf 代数的众多经典结果推广到无穷小 Hopf 代数(见文献[5]).

目前有关无穷小双代数的研究,主要有两个方面,一是它与代数及组合的联系及应用(见文献[6-9]),二是它与 Lie 双代数之间的关系及研究(见文献[10-13]).

本文正是基于上述分析和考虑,将由 Sweedler 代数及其子代数构造新的余代数结构,使之成为无穷小双代数,进而构造无穷小 Hopf 代数及拟三角结构.

该文所讨论的对象均在域 k 的向量空间上,并采用 Sweedler 记法,记域 k 上的代数与余代数结构,详见文献[1].

1 基本定义

定义 1 一个无穷小双代数(见文献[5])是一个三元组(A,m,Δ),其中(A,Δ)是一个余结合余代数

收稿日期:2018-11-17.
基金项目:国家自然科学基金资助(11571173).
通讯联系人:张良云,博士,教授,研究方向:Hopf 代数. E-mail:zlyun@ njau.edu.cn

(可能没有余单位),(A,m)是一个结合代数(可能没有单位元),使得对任意 $a,b\in A$,

$$\Delta(ab)=\Delta(a)b+a\Delta(b),\tag{1}$$

即,上式可以表达为

$$\Delta=(id_A\otimes m)(\Delta\otimes id_A)+(m\otimes id_A)(id_A\otimes\Delta),$$

即,对任意 $a,b\in A$,

$$(ab)_1\otimes(ab)_2=a_1\otimes a_2b+ab_1\otimes b_2,$$

这里 $\Delta(ab)=(ab)_1\otimes(ab)_2,\Delta(a)=a_1\otimes a_2,\Delta(b)=b_1\otimes b_2$.

注 1　1.如果(A,m,Δ)是一个带有单位元 $1\in A$ 的无穷小双代数,则 $\Delta(1)=1\Delta(1)+\Delta(1)1$,故 $\Delta(1)=0$.

2.如果在无穷小双代数(A,m,Δ)中既存在单位元 $1\in A$,又存在余单位 $\varepsilon\in A^*$,则

$$1=(1\otimes\varepsilon)\Delta(1)=0,$$

故 $A=0$.

3.设(A,m,Δ)是一个无穷小双代数,如果它是有限维的,则它的对偶线性空间 A^* 也是一个无穷小双代数,其中乘法结构是

$$A^*\otimes A^*\cong(A\otimes A)^*\xrightarrow{\Delta^*}A^*,$$

余乘法结构是

$$A^*\xrightarrow{m^*}(A\otimes A)^*\cong A^*\otimes A^*.$$

4.设(A,m,Δ)是一个无穷小双代数,则$(A,-m,\Delta)$,$(A,m,-\Delta)$,$(A,-m,-\Delta)$,以及(A,m^{op},Δ^{cop})均是无穷小双代数,这里 $m^{op}=m\circ\tau,\Delta^{cop}=\tau\circ\Delta$.

5.设(A,m)为一个结合代数,则$(A,m,\Delta=0)$为一个无穷小双代数.以后,称这样的无穷小双代数为平凡的无穷小双代数.

定义 2　设 A 为一个无穷小双代数,如果 A 上的恒等映射 id_A 是卷积可逆的(记它的逆元为 $S\in\mathrm{Hom}_k(A,A)$),则称 A 为一个无穷小 Hopf 代数,并称逆元 S 为无穷小 Hopf 代数 A 的对极映射(antipode),这里的卷积定义为:$f,g\in\mathrm{Hom}_k(A,A)$,

$$f\odot g=f*g+f+g=m(f\otimes g)\Delta+f+g.$$

因此,恒等映射 id_A 的卷积逆为 S 表明,对任意 $a\in A$,

$$S(a_1)a_2+S(a)+a=0=a_1S(a_2)+a+S(a).\tag{2}$$

故由方程(2)可得:如果 $u\in\mathrm{Ker}(\Delta)$,则

$$S(u)=-u.$$

定义 3　设 H_4 是一个 Sweedler 四维 Hopf 代数[1],即 $H_4=k\langle 1,g,x,gx\mid g^2=1,x^2=0,xg=-gx\rangle$ 是由元素 g,x 生成的一个代数,它的余代数结构及对极映射定义为

$$\Delta(g)=g\otimes g,\Delta(x)=x\otimes g+1\otimes x,$$
$$\varepsilon(g)=1,\varepsilon(x)=0,$$
$$S(g)=g^{-1},S(x)=-gx.$$

这里域 k 的特征不等于 2(以下所考虑的域 k 特征均不等于 2,如,复数域 $\boldsymbol{C}$).显然,H_4 是一个既非交换也非余交换的 Hopf 代数.

注 2　(1)在上述定义中,如果我们仅仅考虑 Sweedler 四维 Hopf 代数 H_4 的代数结构而忽略它的余代数结构,则称这样的代数为 Sweedler 代数.

(2)由 Sweedler 四维 Hopf 代数 H_4 的定义,不难发现它具有如下子代数:

(ⅰ)平凡子代数:k(一维);H_4(四维);

(ⅱ)二维子代数(有 3 个):$B_1=k\langle 1,g\mid g^2=1\rangle$,$B_2=k\langle 1,x\mid x^2=0\rangle$,$B_3=k\langle 1,gx\mid gx=-xg,x^2=0\rangle$;

(ⅲ)三维子代数(仅有一个):$B_4=k\langle 1,x,gx\mid gx=-xg,x^2=0\rangle$.

定义 4　设(A,r)是一个结合代数,如果存在元素 $r=u_i\otimes v_i\in A\otimes A$ 使得元素 r 是下列(AYB)方程的解:

$$r_{13}r_{12}-r_{12}r_{23}+r_{23}r_{13}=0,$$

则称(A,r)是一个拟三角无穷小双代数[2],这里 $r_{13}=u_i\otimes 1\otimes v_i$,$r_{12}=u_i\otimes v_i\otimes 1$,$r_{23}=1\otimes u_i\otimes v_i$.

注 3 (1)由文献[5]中的命题 5.5 知:拟三角无穷小双代数(A,r)实际上是一个无穷小双代数$(A,m,\Delta=\Delta_r)$,这里余乘法 Δ_r 定义如下:

$$\Delta_r(a)\equiv a\cdot r-r\cdot a.$$

(2)设(A,m,Δ)是 1 个无穷小双代数,则由文献[2]中的命题 5.5 知,存在非零元素 $r=u_i\otimes v_i$ 满足下列条件:

$$\Delta(a)\equiv a\cdot r-r\cdot a, \tag{3}$$

$$(\Delta\otimes id)(r)=-r_{23}r_{13}, \tag{4}$$

$$(id\otimes\Delta)(r)=r_{13}r_{12}, \tag{5}$$

则(A,m,Δ,r)是一个拟三角无穷小双代数.

(3)本文所讨论的拟三角无穷小双代数均指上述注记中的拟三角无穷小双代数,即,存在一个元素 $r=u_i\otimes v_i\in A\otimes A$,并满足条件(3)~(5)的一个无穷小双代数$(A,m,\Delta)$.

2 由 Sweedler 代数的真子代数构造无穷小 Hopf 代数

本节将由 Sweedler 代数的所有真子代数构造无穷小 Hopf 代数及其拟三角结构.

设 $B_1=k\langle 1,g\mid g^2=1\rangle$是 H_4 的二维子代数,并设

$$\Delta(1)=0,$$
$$\Delta(g)=k_1 1\otimes 1+k_2 1\otimes g+k_3 g\otimes 1+k_4 g\otimes g,$$

使得如下相容条件成立:

$$\Delta(g^2)=\Delta(g)g+g\Delta(g)=0\Rightarrow$$
$$(k_2+k_3)1\otimes 1+(k_1+k_4)1\otimes g+(k_1+k_4)g\otimes 1+(k_2+k_3)g\otimes g=0\Rightarrow k_1+k_4=0,k_2+k_3=0.$$

为了在 B_1 上构造无穷小双代数,(B_1,Δ)必须是一个余代数,即,余乘法 Δ 满足余结合律.由于 $\Delta(1)=0$,所以余乘法 Δ 需要满足

$$(id\otimes\Delta)\Delta(g)=(\Delta\otimes id)\Delta(g).$$

经过计算,得到如下关系式:

$$(id\otimes\Delta)\Delta(g)=(k_2 1\otimes k_4 g)\otimes\Delta(g)=k_1k_2 1\otimes 1\otimes 1+k_2^2 1\otimes 1\otimes g+k_2k_3 1\otimes g\otimes 1+$$
$$k_2k_4 1\otimes g\otimes g+k_1k_4 g\otimes 1\otimes 1+k_2k_4 g\otimes 1\otimes g+k_3k_4 g\otimes g\otimes 1+k_4^2 g\otimes g\otimes g,$$
$$(\Delta\otimes id)\Delta(g)=k_3\Delta(g)\otimes 1+k_4\Delta(g)\otimes g=k_1k_3 1\otimes 1\otimes 1+k_2k_3 1\otimes g\otimes 1+k_3^2 g\otimes 1\otimes 1+$$
$$k_3k_4 g\otimes g\otimes 1+k_1k_4 1\otimes 1\otimes g+k_2k_4 1\otimes g\otimes g+k_3k_4 g\otimes 1\otimes g+ +k_4^2 g\otimes g\otimes g.$$

因此,由$(id\otimes\Delta)\Delta(g)=(\Delta\otimes id)\Delta(g)$知:

$$k_1k_2=k_1k_3,k_2^2=k_1k_4,k_1k_4=k_3^2,k_2k_4=k_3k_4.$$

在上述方程组中,若 $k_2\neq 0$,则由上式知:$k_2^2=-k_1^2$,矛盾,因此,$k_2=0$,再由上式和 $k_2^2=-k_1^2$ 知:$k_3=0=k_1$,从而 $k_4=0$.因此,要使(B_1,Δ)为无穷小双代数,必须 $\Delta=0$,即,子代数 B_1 只有平凡的无穷小双代数,没有平凡的无穷小双代数(Hopf 代数).

类似地,我们可以在另外两个二维子代数 B_2 和 B_3 上构造非平凡无穷小双代数(Hopf 代数).

命题 1 Sweedler 代数的 3 个二维子代数的无穷小双代数或无穷小 Hopf 代数的结构如下.

Ⅰ.$B_1=k\langle 1,g\mid g^2=1\rangle$,没有非平凡的无穷小双代数(Hopf 代数).

Ⅱ.$B_2=k\langle 1,x\mid x^2=0\rangle$,无穷小 Hopf 代数结构如下:

$$\Delta(1)=0,\Delta(x)=lx\otimes x,S(1)=-1,S(x)=-x.$$

Ⅲ.$B_3=k\langle 1,gx\mid gx=-xg,x^2=0\rangle$,无穷小 Hopf 代数结构如下:

$$\Delta(1)=0,\Delta(gx)=lgx\otimes gx,S(1)=-1,S(gx)=-gx.$$

设 $B_4=k\langle 1,x,gx\mid gx=-xg,x^2=0\rangle$是 H_4 的一个三维子代数,并设

$$\Delta(x)=k_1 1\otimes 1+k_2 1\otimes x+k_3 1\otimes gx+k_4 x\otimes 1+k_5 x\otimes x+k_6 x\otimes gx+k_7 gx\otimes 1+k_8 gx\otimes x+k_9 gx\otimes gx\Delta(gx)$$

$$=l_1 1\otimes 1+l_2 1\otimes x+l_3 1\otimes gx+l_4 x\otimes 1+l_5 x\otimes x+l_6 x\otimes gx+l_7 gx\otimes 1+l_8 gx\otimes x+l_9 gx\otimes gx.$$

下面,我们将在 B_4 上构造无穷小 Hopf 代数. 为此.设如下相容条件成立:

$$\Delta(x^2)=\Delta(x)x+x\Delta(x)=0, \tag{6}$$

$$\Delta(x\cdot gx)=\Delta(x)gx+x\Delta(gx)=0, \tag{7}$$

$$\Delta(gx\cdot gx)=\Delta(gx)gx+gx\Delta(gx)=0, \tag{8}$$

由于

$$\Delta(x)x+x\Delta(x)=k_1 1\otimes x+k_4 x\otimes x+k_7 gx\otimes x+k_1 x\otimes 1+k_2 x\otimes x+k_3 x\otimes gx=0,$$

$$\Delta(x)gx+x\Delta(gx)=k_1 1\otimes gx+k_4 x\otimes gx+k_7 gx\otimes gx+l_1 x\otimes 1+l_2 x\otimes x+l_3 x\otimes gx=0,$$

$$\Delta(gx)gx+gx\Delta(gx)=l_1 1\otimes gx+l_4 x\otimes gx+l_7 gx\otimes gx+l_1 gx\otimes 1+l_2 gx\otimes x+l_3 gx\otimes gx=0,$$

所以,方程(6),(7),(8)所对应的解分别为

$$k_1=0,k_7=k_3=0,k_2+k_4=0, \tag{6′}$$

$$l_1=0,l_4=l_2=0,l_3+l_7=0, \tag{7′}$$

$$k_1=k_7=l_1=l_2=0,k_4+k_3=0, \tag{8′}$$

为此,再设

$$\Delta(x)=k_2 1\otimes x-k_2 x\otimes 1+k_5 x\otimes x+k_6 x\otimes gx+k_8 gx\otimes x+k_9 gx\otimes gx,$$

$$\Delta(gx)=l_3 1\otimes gx+l_5 x\otimes x+l_6 x\otimes gx-l_3 gx\otimes 1+l_8 gx\otimes x+l_9 gx\otimes gx.$$

为使 B_4 是一个无穷小双代数,(B_4,Δ) 必须是一个余代数,即,余乘法 Δ 需要满足如下余结合律:

$$(id\otimes\Delta)\Delta(x)=(\Delta\otimes id)\Delta(x),$$

$$(id\otimes\Delta)\Delta(gx)=(\Delta\otimes id)\Delta(gx).$$

经过直接计算,可得

$$k_5=k_9=l_6=l_8,$$

其余为 0.因此,

$$\begin{aligned}\Delta(x)&=lx\otimes x+lgx\otimes gx,\\ \Delta(gx)&=lx\otimes gx+lgx\otimes x,\end{aligned}\quad \text{这里 } l\neq 0,$$

再设 $S(x)=k_1 1+k_2 x+k_3 gx,S(gx)=l_1+l_2 x+l_3 gx$,则由等式(2)知:

$$x_1 S(x_2)+S(x)+x=0;(gx)_1 S((gx)_2)+S(gx)+gx=0.$$

因此,通过直接计算得到

$$\begin{cases}k_1=0,\\ l_1 l+k_3=0,\\ k_2-k_1 l+1=0,\end{cases} \tag{9}$$

并且

$$\begin{cases}l_1=0,\\ l_2+l_1 l=0,\\ l_1 l+l_3+1=0.\end{cases} \tag{10}$$

解得

$$k_1=k_3=0,k_2=-1;l_1=l_2=0,l_3=-1.$$

因此,

$$S(x)=-x,S(gx)=-gx,$$

于是有

命题 2　Sweedler 代数的三维子代数 B_4 上的无穷小双代数或无穷小 Hopf 代数的结构如下:

$$\Delta(1)=0,$$

$$\Delta(x)=lx\otimes x+lgx\otimes gx,$$

$$\Delta(gx)=lx\otimes gx+lgx\otimes x,$$

$$S(1)=-1,S(x)=-x,S(gx)=-gx,$$

这里 $l\neq 0$.

接下来,我们在 H_4 的 3 个子代数上分别构造拟三角无穷小 Hopf 代数结构.

首先,在子代数 B_2 上构造拟三角无穷小 Hopf 代数结构. 设

$$r=k_1 1\otimes 1+k_2 1\otimes x+k_3 x\otimes 1+k_4 x\otimes x\in B_2\otimes B_2,$$

满足注 3 中的相容条件(3)~(5).如果元素 r 满足条件(3),则

$$\Delta(x)=x\cdot r-r\cdot x=k_1 x\otimes 1+k_2 x\otimes x-k_1 1\otimes x-k_3 x\otimes x=lx\otimes x,$$

解得 $k_1=0,k_2-k_3=l$.

再设 $r=k_2 1\otimes x+(k_2-l)x\otimes 1+k_4 x\otimes x$,

代入式(4)得

$$(\Delta\otimes id)(r)=l(k_2-l)x\otimes x\otimes 1+k_4 lx\otimes x\otimes x=-r_{23}r_{13}=k_2(l-k_2)x\otimes 1\otimes x-$$
$$(l-k_2)^2 x\otimes x\otimes 1+2k_4(l-k_2)x\otimes x\otimes x+k_2(l-k_2)1\otimes x\otimes x,$$

因此,

$$\begin{cases}k_4 l=2k_4(l-k_2),\\ l(l-k_2)=(l-k_2)^2,\\ k_2(l-k_2)=0.\end{cases}\tag{11}$$

在方程组(11)中,如果 $l-k_2\neq 0$,则 $k_2=0$,因此,$k_4 l=0$,从而 $k_4=0$,解得

$$r=-lx\otimes 1,$$

并且满足式(5).

如果 $l-k_2=0$,即 $k_2=l$, 则由上述方程组(11)解得 $k_4=0$, 于是

$$r=l1\otimes x,$$

并且满足式(5).

综上所述,存在元素 $r=-lx\otimes 1$ 或 $r=l1\otimes x$ 均满足条件(3)~(5),因此,由命题 1 知:$(B_2,r=-lx\otimes 1)$ 和 $(B_2,r=l1\otimes x)$ 均是拟三角无穷小 Hopf 代数.

下面,在子代数 B_3 上构造拟三角结构. 先设

$$r=k_1 1\otimes 1+k_2 1\otimes gx+k_3 gx\otimes 1+k_4 gx\otimes gx,$$

满足注(3)中相容条件(3)~(5).如果元素 r 满足条件(3),则

$$\Delta(gx)=gx\cdot r-r\cdot gx=k_1 gx\otimes 1+k_2 gx\otimes gx-k_1 1\otimes gx-k_3 gx\otimes gx,$$

因此,由命题 1 知:

$$k_1 gx\otimes 1+k_2 gx\otimes gx-k_1 1\otimes gx-k_3 gx\otimes gx=lgx\otimes gx,$$

解得 $k_1=0,k_2-k_3-l=0$.

再设 $r=k_2 1\otimes gx+(k_2-l)gx\otimes 1+k_4 gx\otimes gx$,

代入式(4)得

$$(\Delta\otimes id)(r)=l(k_2-l)gx\otimes gx\otimes 1+k_4 lgx\otimes gx\otimes gx=-r_{23}r_{13}=k_2(l-k_2)gx\otimes 1\otimes gx-$$
$$(l-k_2)^2 gx\otimes gx\otimes 1+2k_4(l-k_2)gx\otimes gx\otimes gx+k_2(l-k_2)1\otimes gx\otimes gx,$$

因此

$$\begin{cases}k_4 l=2k_4(l-k_2),\\ l(l-k_2)=(l-k_2)^2,\\ k_2(l-k_2)=0.\end{cases}\tag{12}$$

注意:方程组(12)与方程组(11)是相同的. 因此,类似方程组(11),我们可以解得

$$r=-lgx\otimes 1,$$

或

$$r=l1\otimes gx.$$

综上所述,$(B_3,r=-lgx\otimes 1)$ 和 $(B_3,r=l1\otimes gx)$ 均是拟三角无穷小 Hopf 代数. 因此,根据命题 1,我们有

命题 3 Sweedler 代数的两个子代数 $B_i(i=2,3)$ 上的拟三角无穷小 Hopf 代数的结构如下:

(1)$B_2=k\langle 1,x\mid x^2=0\rangle$上的拟三角结构:

$$r=-lx\otimes 1;r=l1\otimes x,这里\ l\neq 0.$$

(2)B_3 上的拟三角结构:

$$r=-lgx\otimes 1;r=l1\otimes gx,这里\ l\neq 0.$$

下面,我们将在子代数 $B_4=k\langle 1,x,gx\mid gx=-xg,x^2=0\rangle$ 上构造拟三角结构. 为此,我们假设

$$r=k_1 1\otimes 1+k_2 1\otimes x+k_3 1\otimes gx+k_4 x\otimes 1+k_5 x\otimes x+k_6 x\otimes gx+k_7 gx\otimes 1+k_8 gx\otimes x+k_9 gx\otimes gx$$

满足注 3 中的相容条件(3)~(5). 如果元素 r 满足条件(3),则由命题 2 知:

$$\Delta(x)=x\cdot r-r\cdot x=k_1 x\otimes 1+k_2 x\otimes x+k_3 x\otimes gx-k_1\otimes x-k_4 x\otimes x-k_7 gx\otimes x=lx\otimes x+lgx\otimes gx,$$

解得 $k_1=0,k_2-k_4=l,k_3=0,k_7=0$.

再设 $r=k_2 x\otimes x+(k_2-l)x\otimes 1+k_5 x\otimes x+k_6 x\otimes gx+k_8 gx\otimes x+k_9 gx\otimes gx$,

则由条件(3)知

$$\Delta(gx)=gx\cdot r-r\cdot gx=(k_2-l)x\otimes gx,$$

这与 $\Delta(gx)=lx\otimes gx+lgx\otimes x$,矛盾. 因此,有

命题 4　在 Sweedler 代数的子代数 B_4 上,尽管具有无穷小 Hopf 代数结构,但不存在拟三角结构.

3　由 Sweedler 代数构造无穷小 Hopf 代数

对于 Sweedler 代数 $H_4=k\langle 1,g,x,gx\mid g^2=1,x^2=0,xg=-gx\rangle$,下面,我们构造它的无穷小双代数结构,设

$$\Delta(1)=0,$$

$$\Delta(g)=k_1 1\otimes 1+k_2 1\otimes g+k_3 1\otimes x+k_4 1\otimes gx+k_5 g\otimes 1+k_6 g\otimes g+k_7 g\otimes x+k_8 g\otimes gx+k_9 x\otimes 1+k_{10} x\otimes g+k_{11} x\otimes x+k_{12} x\otimes gx+k_{13} gx\otimes 1+k_{14} gx\otimes g+k_{15} gx\otimes x+k_{16} gx\otimes gx,$$

满足如下相容条件(1):

$$\Delta(g^2)=\Delta(g)g+g\Delta(g)=0,$$

则通过计算得到

$$k_1+k_6=0,k_2+k_5=0,k_3-k_8=0,k_4-k_7=0,$$
$$k_9+k_{14}=0,k_{10}+k_{13}=0,k_{11}-k_{16}=0,k_{15}-k_{12}=0,$$

为此,再设

$$\Delta(g)=k_1 1\otimes 1+k_2 1\otimes g+k_3 1\otimes x+k_4 1\otimes gx-k_2 g\otimes 1-k_1 g\otimes g+k_4 g\otimes x+k_3 g\otimes gx+k_9 x\otimes 1+k_{10} x\otimes g+k_{11} x\otimes x+k_{12} x\otimes gx-k_{10} gx\otimes 1-k_9 gx\otimes g+k_{12} gx\otimes x+k_{11} gx\otimes gx.$$

对于元素 x,设

$$\Delta(n)=l_1 1\otimes 1+l_2 1\otimes g+l_3 1\otimes x+l_4 1\otimes gx-l_5 g\otimes 1+l_6 g\otimes g+l_7 g\otimes x+l_8 g\otimes gx+l_9 x\otimes 1+l_{10} x\otimes g+l_{11} x\otimes x+l_{12} x\otimes gx+l_{13} gx\otimes 1+l_{14} gx\otimes g+l_{15} gx\otimes x+l_{16} gx\otimes gx,$$

满足如下相容条件(1):

$$\Delta(x^2)=\Delta x(x)+x\Delta(x)=0,$$

即

$$\Delta(x)x+x\Delta(x)=l_1 1\otimes x+l_2 1g\otimes x+l_5 g\otimes x+l_6 g\otimes gx+(l_9+l_3)x\otimes x+(l_{10}+l_4)x\otimes gx+(l_{13}-l_7)gx\otimes x+(l_{14}-l_8)gx\otimes gx-l_5 gx\otimes 1-l_6 gx\otimes gx=0,$$

则

$$l_1=0,l_2=0,l_5=0,l_6=0,$$
$$l_3+l_9=0,l_7-l_{13}=0,l_8-l_{14}=0,l_4+l_{10}=0,$$

为此,再设

$$\Delta(x)=l_3 1\otimes x+l_4 1g\otimes x+l_7 g\otimes x+l_8 g\otimes gx-l_3 x\otimes 1-l_4 x\otimes g+l_{11} x\otimes x+l_{12} x\otimes gx+l_7 gx\otimes 1+l_8 gx\otimes g+l_{15} gx\otimes x+l_{16} gx\otimes gx.$$

对于元素 gx,由于 $\Delta(gx)=\Delta(g)x+g\Delta(x)$,所以将以上计算所得 $\Delta(x)$,$\Delta(g)$ 代入 $\Delta(g)x+g\Delta(x)$,并整理得

$$\Delta(gx)=\Delta(g)x+g\Delta(x)=(k_1+l_7)1\otimes x+(-k_2+l_3)g\otimes x+(-k_1+l_4)g\otimes gx+(k_9+l_{15})x\otimes x+(k_{10}+l_{16})x\otimes gx+(-k_{10}+l_{11})gx\otimes x+(-k_9+l_{12})gx\otimes gx+(k_2+l_8)1\otimes gx-l_3gx\otimes 1-l_4gx\otimes g-l_7x\otimes 1-l_8x\otimes g.$$

又由于(H_4,Δ)须是一个余代数,即,它的余乘法Δ满足如下余结合律:

$$(id\otimes\Delta)\Delta(g)=(\Delta\otimes id)\Delta(g),$$
$$(id\otimes\Delta)\Delta(x)=(\Delta\otimes id)\Delta(x),$$
$$(id\otimes\Delta)\Delta(gx)=(\Delta\otimes id)\Delta(gx),$$

经过计算并辅助 Mathematica,我们不难得到如下结果:

Ⅰ $k_4=k_7=l_{11}=l$,其余为 0;

Ⅱ $k_3=k_8=l_{12}=l$,其余为 0;

Ⅲ $k_{12}=k_{15}=l$,其余为 0;

Ⅳ $k_{11}=k_{16}=l_1,l_{12}=l_{15}=l_2$,其余为 0;

Ⅴ $k_{12}=k_{15}=l_1,k_{11}=k_{16}=l_2$,其余为 0;

Ⅵ $k_{12}=k_{15}=l_1,l_{11}=l_{16}=l_2$,其余为 0;

这里l,l_1,l_2,l_3均是域k上的任意数.

综上,我们有

定理 1 Sweedler 代数$H_4=k\langle 1,g,x,gx\mid g^2=1,x^2=0,xg=-gx\rangle$上的无穷小双代数的结构如下:

Ⅰ

$$\Delta(1)=0,$$
$$\Delta(g)=l1\otimes gx+lg\otimes x,$$
$$\Delta(x)=lx\otimes x,$$
$$\Delta(gx)=lgx\otimes x;$$

Ⅱ

$$\Delta(1)=0,$$
$$\Delta(g)=l1\otimes x+lg\otimes gx,$$
$$\Delta(x)=lx\otimes gx,$$
$$\Delta(gx)=lgx\otimes gx;$$

Ⅲ

$$\Delta(1)=0,$$
$$\Delta(g)=lg\otimes x+lx\otimes gx$$
$$\Delta(x)=0,\Delta(gx)=0;$$

Ⅳ

$$\Delta(1)=0,$$
$$\Delta(g)=l_1x\otimes x+l_1x\otimes gx,$$
$$\Delta(x)=l_2x\otimes gx+l_2gx\otimes x,$$
$$\Delta(gx)=l_2gx\otimes gx+l_2x\otimes x;$$

Ⅴ

$$\Delta(1)=0,$$
$$\Delta(g)=l_1gx\otimes x+l_1x\otimes gx+l_2x\otimes x+l_2gx\otimes gx,$$
$$\Delta(x)=0,\Delta(gx)=0;$$

Ⅵ

$$\Delta(1)=0,$$
$$\Delta(g)=0,$$
$$\Delta(x)=l_1gx\otimes x+l_1x\otimes gx+l_2x\otimes x+l_2gx\otimes gx,$$
$$\Delta(gx)=l_1gx\otimes gx+l_1x\otimes x+l_2gx\otimes x+l_2x\otimes gx,$$

这里l,l_1,l_2均是域k上的任意数.

针对定理 1 中的 6 种无穷小双代数,并由等式(2),我们可以计算 Sweedler 代数 H_4 上的无穷小 Hopf 代数的对极映射,经计算得到

命题 5　Sweedler 代数 $H_4=k\langle 1,g,x,gx\mid g^2=1,x^2=0,xg=-gx\rangle$ 上的无穷小 Hopf 代数的对极映射如下:

Ⅰ　$S(1)=-1,S(g)=-g+2lgx,S(x)=-x,S(gx)=-gx$;

Ⅱ　$S(1)=-1,S(g)=-g+2lx,S(x)=-x,S(gx)=-gx$;

Ⅲ　$S(1)=-1,S(g)=-g,S(x)=-x,S(gx)=-gx$;

Ⅳ　$S(1)=-1,S(g)=-g,S(x)=-x,S(gx)=-gx$;

Ⅴ　$S(1)=-1,S(g)=-g,S(x)=-x,S(gx)=-gx$;

Ⅵ　$S(1)=-1,S(g)=-g,S(x)=-x,S(gx)=-gx$,

这里 l 是域 k 上的任意数.

针对定理 1 中的无穷小双代数和命题 5 中的无穷小 Hopf 代数,再由注 3,我们可以构造 Sweedler 代数 H_4 上的拟三角无穷小 Hopf 代数,计算结果如下.

命题 6　Sweedler 代数 $H_4=k\langle 1,g,x,gx\mid g^2=1,x^2=0,xg=-gx\rangle$ 上的拟三角无穷小 Hopf 代数的结构如下:

Ⅰ　$r=l1\otimes x$

Ⅱ　$r=l_1 1\otimes gx$,

Ⅲ　$r=l_1x\otimes x+l_2x\otimes gx-l_2gx\otimes x+(l-l_1)gx\otimes gx$,

Ⅳ　$r=l_1gx\otimes x+l_2 1\otimes gx-l_2g\otimes x$,

Ⅴ　$r=l_1x\otimes x+l_2x\otimes gx+(l-l_2)gx\otimes x+(l-l_1)gx\otimes gx$,

Ⅵ　$r=l_1 1\otimes x+l_2 1\otimes gx+l_2g\otimes x+l_1g\otimes gx$,

这里 l,l_1,l_2,均是域 k 上的任意数.

[参考文献]

[1] SWEEDLER M E. Hopf algebras[M]. Benjamin:New York,1969.

[2] CARNOVALE G,CUADRA J. On the subgroup structure of the full Brauer group of Sweedler Hopf algebra[J]. Israel journal of mathematics,2011,183(1):61-92.

[3] OYSTAEYEN F V,ZHANG Y H. The Brauer group of Sweedler's Hopf algebra H_4[J]. Proceedings of the American mathematical society,2001,129(2):371-380.

[4] JONI S A,ROTA G C. Coalgebra and bialgebra in combinatories[J]. Studies in applied mathematics,1979,61:93-139.

[5] AGUIAR M. Infinitesimal Hopf algebras[J]. Contemporary mathematics,2000,267:1-30.

[6] AGUIAR M. Infinitesimal Hopf algebras and the cd-index of polytopes,in:Geometric combinatorics[J]. Discrete computational geometry,2002,27:3-28.

[7] EHRENBORG R,READDY M. Coproducts and the cd-index[J]. Journal of algebraic combinatorics,1998,8:273-299.

[8] FOISSY L. The infinitesimal Hopf algebra and the poset of planar forests[J]. Journal of algebraic combinatorics,2009,30:27-309.

[9] MAKHLOUF A. Hom-alternative algebras and Hom-Jordan algebras[J]. arXiv,0909,0326.

[10] DRINFEL'D V G. Hamiltonian structures on Lie groups,Lie bialgebras and the geometric meaning of the classical Yang-Baxter equations[J]. Soviet mathematics-doklady,1983,268:285-287.

[11] DRINFEL'D V G.Quantum groups[C]//Proceedings Int Congress of Mathematicians. Berkeley,Colifornic,1986:798-820.

[12] FARINATI M A,JANCSA A P. Trivial central extensions of Lie bialgebras[J]. Journal of algebra,2013,390:56-76.

[13] HALBOUT G. Formality theorem for Lie bialgebras and quantization of twists and coboundary r-matrices[J]. Advances in mathematics,2006,207:617-633.

[责任编辑:陆炳新]