

抛物型方程的混合虚拟有限元方法

郭海荣¹, 王 锋²

(1.南京财经高等职业技术学校, 江苏 南京 210029)

(2.南京师范大学数学科学学院, 江苏 南京 210023)

[摘要] 虚拟有限元是定义在任意多边形或多面体网格上的有限元. 本文研究了抛物型方程的混合虚拟有限元方法, 给出了先验误差估计, 并给出了一些数值实验进行验证.

[关键词] 虚拟有限元, 混合元, 抛物问题

[中图分类号] O214.82 [文献标志码] A [文章编号] 1001-4616(2019)04-0025-06

Mixed Virtual Element Methods for Parabolic Equations

Guo Hairong¹, Wang Feng²

(1.Nanjing Vocational College of Finance and Economics, Nanjing 210029, China)

(2.School of Mathematical Sciences, Nanjing Normal University, Nanjing 210023, China)

Abstract: Virtual elements are defined on arbitrary polygonal or polyhedral grids. In this paper, mixed virtual elements are proposed for parabolic equations. We present a priori error estimates, which are verified by some numerical experiments.

Key words: virtual element, mixed finite element, parabolic equation

近来, 基于多边形多面体网格的数值方法引起越来越多的学者的关注, 见例^[1,2]. 这类方法对网格要求比较自由, 能很好地处理带悬点的网格、带凹角的网格、变形的网格等等. 虚拟有限元方法^[3]是其中的一种. 该方法不需要知道单元上基函数的解析表达式, 只需要定义合适的自由度, 借助分部积分来计算. 该方法已经在诸如二阶椭圆问题、界面问题、线弹性问题、板问题等稳态的问题上得到很好的应用. 但是在带时间问题上的应用还是比较少见^[4].

本文我们考虑 Ω 上的混合形式的抛物型方程

$$\begin{cases} u_t + \operatorname{div} \sigma = f & \text{in } \Omega \times (0, T], \\ \sigma + \nabla u = 0 & \text{in } \Omega \times (0, T]. \end{cases} \quad (1)$$

初始值 $u(x, 0) = u^0(x)$, $x \in \Omega$, 边值 $u(x, t) = 0$, $x \in \partial\Omega$. 我们将文献[5-6]提出的混合虚拟元应用到抛物问题(1)上, 时间方向采用向后 Euler 方法, 空间方向采用混合虚拟元方法. 我们细致分析了半离散和全离散格式的误差估计. 在真解具有一定光滑性假设下, 时间和空间方向都是 1 阶. 最后我们给出了一些数值实验来验证理论结果.

1 $H(\operatorname{div})$ 虚拟有限元空间

简单起见, 我们只考虑二维区域上的问题. 我们将区域 Ω 分成若干个多边形, 其集合记为 G_h . 假设每个多边形单元都是正则的, 也即满足: (1) 每个单元 E 都是星型的; (2) 单元的直径 h_E 与边的长度 h_e 的比值有正的上下界, 且与网格的尺寸无关. 我们还假设所有多边形的尺寸都差不多, 记为 h . 定义每个单元 E 上的局部空间为:

$$V_E = \{ \sigma \in H(\operatorname{div}, E) \cap H(\operatorname{rot}, E) : \sigma \cdot n \in P_1(e), \forall e \subset \partial E, \operatorname{div} \sigma \in P_0(E), \operatorname{rot} \sigma \in P_0(E) \},$$

收稿日期: 2019-04-21.

基金项目: 国家自然科学基金(11871272).

通讯联系人: 王锋, 博士, 副教授, 研究方向: 偏微分方程数值解. E-Mail: fengwang@live.cn

其中 $P_1(E), P_0(E)$ 分别为线性多项式和常数空间, $H(\operatorname{div}, E)$ (或者 $H(\operatorname{rot}, E)$) 表示函数及其散度(或旋度)都是平方可积的空间. 容易看出多项式空间 $P_1(E)$ 是 V_E 的一个子空间, 这确保了有限元空间具有最优逼近性. 和传统的有限元方法不一样的是, 空间 V_E 中含有非多项式函数, 且没有显式的表达式, 除了定义的自由度外, 该空间的函数是不可计算的, 这也正是“虚拟”的原因所在. 当然在实际计算中, 只需要自由度就可以进行相应的计算. 空间 V_E 函数的自由度定义为:

$$\text{类型 I} \quad \int_e \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} q_1 \, ds, q_1 \in P_1(e), e \subset \partial E,$$

$$\text{类型 II} \quad \int_E \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{q} \, dx, \mathbf{q} \in (\operatorname{grad} P_2(E))^{\perp P_1(E)},$$

唯一可解性参照[6]. 对任意的 $\mathbf{v} \in V_E$, 定义 $\Pi_E \mathbf{v} \in P_1(E)$ 满足

$$\int_E \Pi_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{q} \, dx := \int_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{q} \, dx, \quad \forall \mathbf{q} \in P_1(E).$$

由自由度的定义, 上面的 L^2 投影是可计算的. 事实上, 根据第 I 类自由度, 我们可以确定 $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ 在每条边上的值, 以及 $\operatorname{div} \mathbf{v}$ 在 E 的值, 也即能计算 $\int_E \mathbf{v} \cdot \nabla p_2$ 的值, 再根据第 II 类自由度, $\int_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{q}$ 都是可以计算的. 另外, 插值算子 $I_E^V: H^1(E) \rightarrow V_E$ 定义为:

$$\int_e I_E^V \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} q_1 \, ds = \int_e \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} q_1 \, ds, q_1 \in P_1(e), e \subset \partial E,$$

$$\int_E I_E^V \mathbf{v} \cdot \mathbf{q}_1 \, dx = \int_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{q}_1 \, dx, \mathbf{q}_1 \in (\nabla P_2(E))^{\perp P_1(E)}.$$

定义整个区域上的虚拟有限元空间为

$$\mathbf{V}_h := \{ \mathbf{v} \in H(\operatorname{div}, \Omega), \mathbf{v}|_E \in V_E, \forall E \in G_h, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{\partial \Omega} = 0 \}$$

其中 \mathbf{n} 表示边界 $\partial \Omega$ 的单位外法向量. 插值算子 I_h^V 定义为 $I_h^V|_E = I_E^V$. 我们还需要 G_h 上的分片常数空间 Q_h , 及其上的分片 L^2 投影 I_h^Q .

2 半离散格式

给定初值 $u_h(0) = I_h^Q u^0$, 我们的半离散格式为求 $(u_h, \boldsymbol{\sigma}_h) \in Q_h \times V_h$ 满足

$$\begin{cases} a_h(u_h, v_h) + b(\boldsymbol{\sigma}_h, v_h) = (f, v_h), & \forall v_h \in Q_h, \\ b(\boldsymbol{\tau}_h, u_h) - a_h(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\tau}_h) = 0, & \forall \boldsymbol{\tau}_h \in V_h. \end{cases} \quad (2)$$

其中, 下标 t 表示对时间 t 的导数, $b(\boldsymbol{\tau}_h, u_h) = (\operatorname{div} \boldsymbol{\tau}_h, v_h)$,

$$a_h(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\tau}_h) := \sum_{E \in G_h} (\Pi_E \boldsymbol{\sigma}_h, \Pi_E \boldsymbol{\tau}_h)_E + D_h^E((I - \Pi_E) \boldsymbol{\sigma}_h, (I - \Pi_E) \boldsymbol{\tau}_h).$$

这里 D_E 表示由 V_E 空间自由度表示形成的对角阵算子, 详见[5].

引理 1([5, 命题 5.2]) 对任意的 $\boldsymbol{\tau}_h \in V_h$, 我们有

$$a_h(\boldsymbol{\tau}_h, \boldsymbol{\tau}_h) \cong (\boldsymbol{\tau}_h, \boldsymbol{\tau}_h).$$

易知 $\operatorname{div} V_h = Q_h$, 从而关于双线性形式 $b(\cdot, \cdot)$ 有 inf-sup 条件成立, 应用鞍点问题的一般理论知, 问题(3)存在唯一解.

引理 2 若 $\boldsymbol{\sigma} \in H^1$, 则对任意的 $\boldsymbol{\tau}_h \in V_h$ 我们有

$$|a_h(I_h^V \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}_h) - (I_h^V \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}_h)| \leq h \|\boldsymbol{\sigma}\|_1 \|\boldsymbol{\tau}_h\|_{a_h},$$

这里 $\|\cdot\|_{a_h}$ 为由 $a_h(\cdot, \cdot)$ 诱导的范数.

证明 根据双线性形 $a_h(\cdot, \cdot)$ 的定义、Cauchy-Schwarz 不等式、插值误差估计^[7], 我们有

$$a_h(I_h^V \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}_h) - (I_h^V \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}_h) = \sum_{E \in G_h} (\Pi_E I_h^V \boldsymbol{\sigma} - I_h^V \boldsymbol{\sigma}, \Pi_E \boldsymbol{\tau}_h)_E + D_h^E((I - \Pi_E) I_h^V \boldsymbol{\sigma}, (I - \Pi_E) \boldsymbol{\tau}_h) \leq h \|\boldsymbol{\sigma}\|_1 \|\boldsymbol{\tau}_h\|_{a_h}.$$

证毕.

对任意的时间 t , 我们定义误差:

$$e_{\boldsymbol{\sigma}} = I_h^V \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h, e_u = I_h^Q u - u_h, \varepsilon_{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma} - I_h^V \boldsymbol{\sigma}, \varepsilon_u = u - I_h^Q u.$$

根据问题(1)和(2),以及插值算子的性质,对任意 $\tau_h \in V_h, v_h \in Q_h$,我们有误差方程

$$(e_{u,t}, v_h) + b(e_\sigma, v_h) = 0, \quad (3)$$

$$b(\tau_h, e_u) - a_h(e_\sigma, \tau_h) = (I_h^V \sigma, \tau_h) + (\varepsilon_\sigma, \tau_h) - a_h(I_h^V \sigma, \tau_h). \quad (4)$$

定理 1 设 (σ, τ) 和 (σ_h, τ_h) 分别是问题(1)和(2)的解. 若 $u^0 \in H^2, \sigma, \sigma_t \in L^2([0, T]; H^1)$, 下列不等式成立.

$$\int_0^t \|I_h^V \sigma - \sigma_h\|_{a_h}^2 dt + \|I_h^Q u(t) - u_h(t)\|_0^2 \leq Ch^2 \int_0^t \|\sigma\|_1^2 dt,$$

$$\|I_h^V \sigma(t) - \sigma_h(t)\|_{a_h}^2 \leq C(t)h^2 (\|\sigma(0)\|_1^2 + \int_0^t \|\sigma_t\|_1^2 dt).$$

证明 在方程(4)中取 $\tau_h = e_\sigma$, 方程(3)中取 $v_h = e_u$, 并将两个方程相减得:

$$\|e_\sigma\|_{a_h}^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|e_u\|^2 = a_h(I_h^V \sigma, e_\sigma) - (I_h^V \sigma, e_\sigma) - (\varepsilon_\sigma, e_\sigma).$$

再利用引理 1~2, Cauchy-Schwarz 不等式和插值误差估计, 有

$$\|e_\sigma\|_{a_h}^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|e_u\|^2 \leq h \|\sigma\|_1 \|e_\sigma\|_{a_h} \leq Ch^2 \|\sigma\|_1^2 + \frac{1}{2} \|e_\sigma\|_{a_h}^2.$$

从而

$$\|e_\sigma\|_{a_h}^2 + \frac{d}{dt} \|e_u\|^2 \leq Ch^2 \|\sigma\|_1^2.$$

对时间从 0 到 t 的积分, 得到

$$\int_0^t \|e_\sigma\|_{a_h}^2 dt + \|e_u(t)\|^2 \leq Ch^2 \int_0^t \|\sigma\|_1^2 dt + \|e_u(0)\|^2 = Ch^2 \int_0^t \|\sigma\|_1^2 dt.$$

接下来, 我们估计 $\|e_\sigma\|_{a_h}$. 对方程(4)两边关于时间 t 求导, 并取 $\tau_h = e_\sigma$, 方程(3)中取 $v_h = e_{u,t}$, 我们有

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|e_\sigma\|_{a_h}^2 + \|e_{u,t}\|_0^2 = a_h(I_h^V \sigma_t, e_\sigma) - (I_h^V \sigma_t, e_\sigma) - (\varepsilon_{\sigma,t}, e_\sigma) \leq$$

$$h \|\sigma_t\|_1 \|e_\sigma\|_{a_h} \leq Ch^2 \|\sigma_t\|_1^2 + \frac{1}{2} \|e_\sigma\|_{a_h}^2.$$

利用 Gronwall 不等式(见[例 8, 引理 6.9]),

$$\|e_\sigma\|_{a_h}^2 \leq \exp(t) \|e_\sigma(0)\|_{a_h}^2 + Ch^2 \int_0^t \exp(t-s) \|\sigma_t\|_1^2 ds \leq h^2 \exp(t) (\|\sigma(0)\|_1^2 + C \int_0^t \|\sigma_t\|_1^2 dt).$$

证毕.

3 全离散格式

简单起见, 我们在时间方向采用后 Euler 方法. 记 $\Delta t = T/N$ 为时间步长, 用上标 n , 例如 σ^n, u^n , 表示函数在时刻 $t_n = n\Delta t$ 的值, 下标 h 表示离散解.

给定初值 $u_h^0 = I_h^Q u^0$, 对 $1 \leq n \leq N$, 全离散格式为求 $(u_h^n, \sigma_h^n) \in Q_h \times V_h$, 满足

$$\begin{cases} (\delta_t u_h^n, v_h) + b(\sigma_h^n, v_h) = (f^n, v_h) & \forall v_h \in Q_h, \\ b(\tau_h, u_h^n) + a_h(\sigma_h^n, \tau_h) = 0 & \forall \tau_h \in V_h. \end{cases} \quad (5)$$

其中 $\delta_t u_h^n = (u_h^n - u_h^{n-1})/\Delta t$.

定义误差如下

$$e_\sigma^n = I_h^V \sigma^n - \sigma_h^n, e_u^n = I_h^Q u^n - u_h^n, \varepsilon_\sigma^n = \sigma^n - I_h^V \sigma^n, \varepsilon_u^n = u^n - I_h^Q u^n.$$

根据式(1)-(5), 以及插值算子的性质, 对任意的 $v_h \in Q_h, \tau_h \in V_h$, 我们有误差方程

$$(\delta_t e_u^n, v_h) + b(e_\sigma^n, v_h) = (\delta_t u^n - u_t^n, v_h), \quad (6)$$

$$b(e_\sigma^n, \tau_h) - a_h(e_\sigma^n, \tau_h) = (I_h^V \sigma^n, \tau_h) + (\varepsilon_\sigma^n, \tau_h) - a_h(I_h^V \sigma^n, \tau_h). \quad (7)$$

引理 3 对每个 $n > 0$, 我们有

$$\|\delta_t u^n - u_t^n\|_0^2 \leq \frac{1}{3} (\Delta t)^2 \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|u_{tt}\|_0^2 dt.$$

引理 4 下列不等式成立

$$\|e_u^n\|_0 \leq \|e_\sigma^n\|_{a_h} + h \|\sigma^n\|_1.$$

证明 由 inf-sup 条件, 存在 $\tau_h \in V_h$, 使得

$$\operatorname{div} \tau_h = e_u^n, \|\tau_h\|_{a_h} \leq \|e_u^n\|_0.$$

我们有

$$\begin{aligned} \|e_u^n\|_0^2 &= (\operatorname{div} \tau_h, e_u^n) = a_h(e_\sigma^n, \tau_h) + (I_h^V \sigma^n, \tau_h) - a_h(I_h^V \sigma^n, \tau_h) + (\varepsilon_\sigma^n, \tau_h) \leq \\ &\|e_\sigma^n\|_{a_h} \|\tau_h\|_{a_h} + h \|\sigma^n\|_1 \|\tau_h\|_{a_h} \leq (\|e_\sigma^n\|_{a_h} + h \|\sigma^n\|_1) \|e_u^n\|_0. \end{aligned}$$

两边消去 $\|e_u^n\|_0$ 即得所证.

引理 5 (离散的 Gronwall 不等式) 若 $\{\varphi_n\}, \{y_n\}$ 是非负序列, 常数 $A \geq 0$, 若有不等式 $\varphi_n \leq A + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \varphi_i$, 则

$$\varphi_n \leq A \exp\left(\sum_{i=1}^{n-1} y_i\right).$$

引理 6 设 (σ, u) 和 $(\sigma_h^n, u_h^n), n=1, 2, \dots, N$, 分别是问题(1)和问题(5)的解. 若 $u_u \in L^2([0, T]; L^2)$, $\sigma \in L^\infty([0, T]; H^1), \sigma_t \in L^2([0, T]; H^1)$, 则

$$\begin{aligned} \|e_u^N\|_0^2 &\leq C(h^2 \|\sigma\|_{L^2([0, T]; H^1)}^2 + (\Delta t)^2 \|u_u\|_{L^2([0, T]; L^2)}^2), \\ \|e_\sigma^N\|_{a_h}^2 &\leq C(h^2 \|\sigma_t\|_{L^2([0, T]; H^1)}^2 + (\Delta t)^2 \|u_u\|_{L^2([0, T]; L^2)}^2). \end{aligned}$$

证明 由误差方程(6)-(7), 令 $\tau_h = e_\sigma^n, v_h = e_u^n$, 根据插值误差估计, Cauchy-Schwarz 不等式知

$$\begin{aligned} \|e_\sigma^n\|_{a_h}^2 + (\delta_t e_u^n, e_u^n) &\leq Ch \|\sigma^n\|_1 \|e_\sigma^n\|_{a_h} + \frac{1}{\sqrt{3}} \Delta t \left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} \|u_u\|_0^2 dt\right)^{1/2} \|e_u^n\|_0 \leq \\ Ch^2 \|\sigma^n\|_1^2 + \frac{1}{2} \|e_\sigma^n\|_{a_h}^2 + \frac{\Delta t}{2} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|u_u\|_0^2 dt + \frac{\Delta t}{2} \|e_u^n\|_0^2. \end{aligned}$$

利用恒等式 $2(p-q)p = p^2 - q^2 + (p-q)^2$,

$$\Delta t \|e_\sigma^n\|_{a_h}^2 + \|e_u^n\|_0^2 - \|e_u^{n-1}\|_0^2 \leq Ch^2 \Delta t \|\sigma^n\|_1^2 + (\Delta t)^2 \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|u_u\|_0^2 dt + (\Delta t)^2 \|e_u^n\|_0^2.$$

对 $n=1, 2, \dots, N$ 求和得

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \Delta t \|e_\sigma^n\|_{a_h}^2 + (1 - (\Delta t)^2) \|e_u^N\|_0^2 - \|e_u^0\|_0^2 &\leq Ch^2 \sum_{n=1}^N \Delta t \|\sigma^n\|_1^2 + (\Delta t)^2 \int_0^T \|u_u\|_0^2 dt + \\ &\sum_{n=1}^{N-1} (\Delta t)^2 \|e_u^n\|_0^2. \end{aligned}$$

从而,

$$(1 - (\Delta t)^2) \|e_u^N\|_0^2 - \|e_u^0\|_0^2 \leq Ch^2 \sum_{n=1}^N \Delta t \|\sigma^n\|_1^2 + (\Delta t)^2 \int_0^T \|u_u\|_0^2 dt + \sum_{n=1}^{N-1} (\Delta t)^2 \|e_u^n\|_0^2.$$

再根据引理 5, 以及不等式 $\sum_{n=1}^N \Delta t \|\sigma^n\|_1^2 \leq T \|\sigma\|_{L^\infty([0, T]; H^1)}^2$, 我们得到

$$\|e_u^N\|_0^2 \leq (Ch^2 T \|\sigma\|_{L^\infty([0, T]; H^1)}^2 + (\Delta t)^2 \|u_u\|_{L^2([0, T]; L^2)}^2) \frac{1}{1 - (\Delta t)^2} \exp\left(\frac{T \Delta t}{1 - (\Delta t)^2}\right).$$

另一方面, 根据等式(7), Cauchy-Schwarz 不等式, 插值误差估计知

$$\begin{aligned} a_h(\delta_t e_\sigma^n, e_u^n) - b(\tau_h, \delta_t e_u^n) &= a_h(\delta_t(I_h^V \sigma^n), \tau_h) - \delta_t(I_h^V \sigma^n, \tau_h) - (\delta_t(\varepsilon_\sigma^n), \tau_h) \leq \\ Ch \|\delta_t(\sigma^n)\|_1 \|\tau_h\|_{a_h} &\leq \frac{Ch^2}{2\Delta t} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|\sigma_t\|_1^2 dt + \frac{1}{2} \|\tau_h\|_{a_h}^2. \end{aligned}$$

在式(7)中令 $\tau_h = e_\sigma^n$, 并加到式(6) ($v_h = \delta_t e_u^n$), 得到

$$a_h(\delta_t e_\sigma^n, e_u^n) + \|\delta_t e_u^n\|_0^2 \leq \frac{Ch^2}{2\Delta t} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|\sigma_t\|_1^2 dt + \frac{1}{2} \|e_\sigma^n\|_{a_h}^2 + (\Delta t)^2 \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|u_u\|_0^2 dt + \frac{1}{2} \|\delta_t e_u^n\|_0^2.$$

利用恒等式 $2(p-q)p = p^2 - q^2 + (p-q)^2$, 有

$$\|e_{\sigma}^n\|_{a_h}^2 - \|e_{\sigma}^{n-1}\|_{a_h}^2 + \frac{\Delta t}{2} \|\delta_t e_u^n\|_0^2 \leq Ch^2 \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|\sigma_t\|_1^2 dt + \Delta t \|e_{\sigma}^n\|_{a_h}^2 + (\Delta t)^3 \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|u_{tt}\|_0^2 dt.$$

再根据离散的 Gronwall 不等式,我们得到

$$\|e_{\sigma}^N\|_{a_h}^2 \leq (Ch^2 \|\sigma_t\|_{L^\infty([0,T];H^1)}^2 + (\Delta t)^3 \|u_{tt}\|_{L^2([0,T];L^2)}^2) \frac{1}{1-\Delta t} \exp\left(\frac{T}{1-\Delta t}\right).$$

证毕.

4 数值实验

本节我们考虑 $\Omega=[0,1]^2$ 上的模型问题(1).假设真解为

$$u(x,t) = (2 - \pi \sin(\pi x))(-y + \cos(\pi(1-y)))(2 + \cos(2\pi t)).$$

相应的右端项及边界条件由 $u(x,t)$ 给出.我们将采用下图 4 种不同的网格来进行数值实验.对于 G_1 ,我们取时间步长 $t=h/2$,其他 3 种网格时间步长取 $t=h \cong \frac{1}{\sqrt{\#Dof}}$,这里 $\#Dof$ 表示未知数的个数.表 1 和表 2 列出了基于不同类型网格剖分的各种误差,图 2 画出了误差随网格尺寸变化情况,可见误差是至少 1 阶下降的.

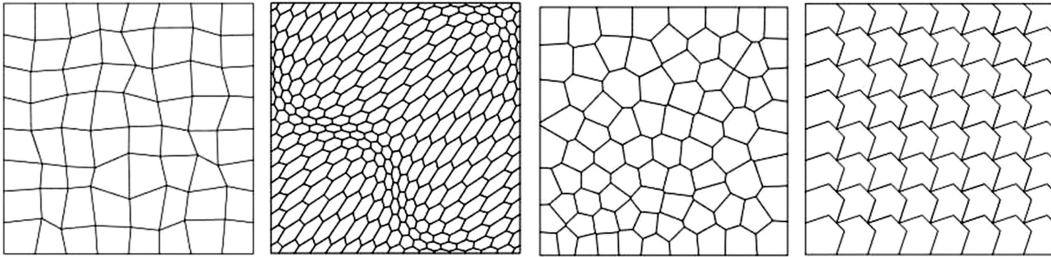


图 1 4 种多边形网格剖分 G_1, G_2, G_3, G_4

Fig. 1 Four kinds of polygonal grids

表 1 基于剖分 G_1 和 G_2 离散的误差

Table 1 The approximate errors on grids G_1 and G_2

	$\#Dof$	$\ u_I - u_h\ _0$	$\ u - u_h\ _0$	$\ \sigma_I - \sigma_h\ _{a_h}$	$\ \operatorname{div}(\sigma_I - \sigma_h)\ _0$
G_1	112	9.88e-02	4.78e-01	3.82e+00	1.00e-01
	416	8.45e-02	5.32e-01	1.96e+00	9.52e-02
	1 600	1.78e-02	2.67e-01	7.03e-01	2.44e-02
	6 272	3.29e-03	1.34e-01	2.13e-01	6.13e-03
	24 832	5.49e-04	6.74e-02	6.05e-02	1.54e-03
G_2	226	5.29e-01	1.00e+00	9.34e+00	5.15e-01
	706	8.17e-02	5.69e-01	3.31e+00	1.48e-01
	2 434	2.14e-02	3.28e-01	2.06e+00	4.44e-02
	8 962	6.74e-03	1.74e-01	9.65e-01	1.22e-02
	34 306	2.79e-03	8.92e-02	4.65e-01	3.18e-03

表 2 基于剖分 G_3 和 G_4 离散的误差

Table 2 The approximate based on grids G_3 and G_4

	$\#Dof$	$\ u_I - u_h\ _0$	$\ u - u_h\ _0$	$\ \sigma_I - \sigma_h\ _{a_h}$	$\ \operatorname{div}(\sigma_I - \sigma_h)\ _0$
G_3	626	9.88e-02	4.78e-01	3.82e+00	1.00e-01
	2 502	2.85e-02	2.40e-01	2.29e+00	3.54e-02
	10 006	7.52e-03	1.22e-01	1.05e+00	9.80e-03
	39 954	1.32e-03	6.13e-02	4.57e-01	2.56e-03
	159 758	6.30e-04	3.02e-02	2.08e-01	6.23e-04
G_4	192	3.36e-01	1.09e+00	7.93e+00	5.74e-01
	704	1.04e-01	5.38e-01	3.63e+00	1.82e-01
	2 688	2.73e-02	2.67e-01	1.69e+00	4.77e-02
	10 496	5.53e-03	1.33e-01	8.11e-01	1.21e-02
	41 472	1.47e-03	6.64e-02	3.96e-01	3.02e-03

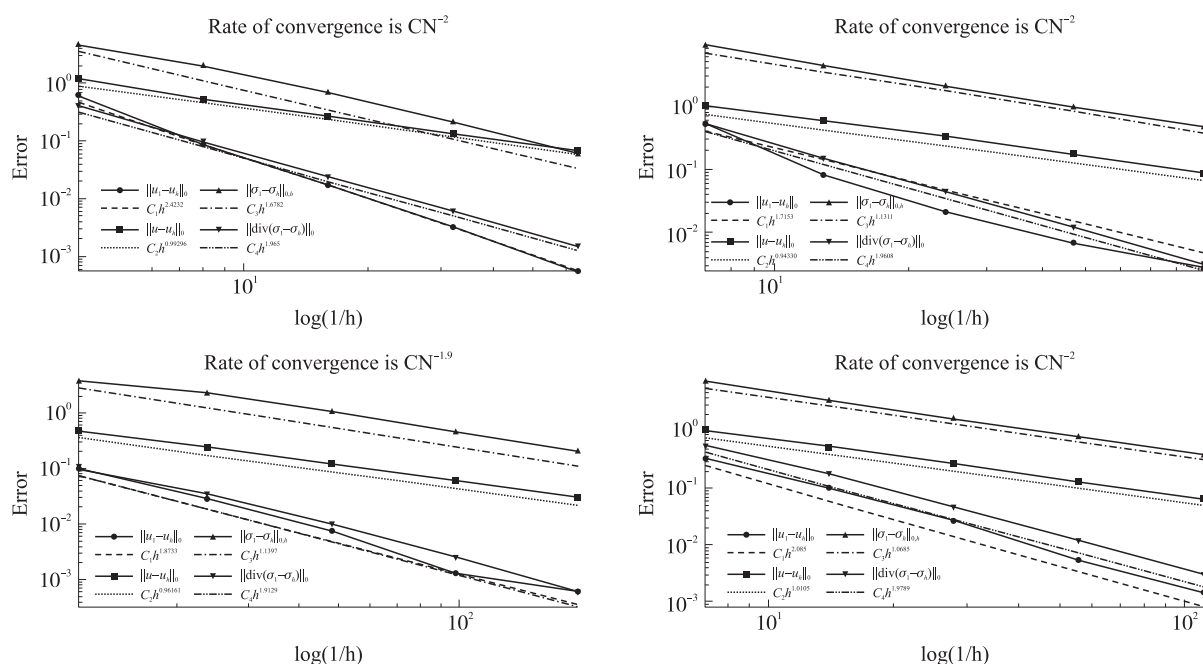


图 2 网格 G_1, G_2, G_3, G_4 (从左往右,从上到下)对应的误差下降图

Fig. 2 Plots of the decay of the errors on grids G_1, G_2, G_3 and G_4 (listed from left to right,below to up)

[参考文献]

- [1] MU L,WANG J,XIU YE. Weak Galerkin finite element methods on polytopal meshes[J]. International journal of numerical analysis & modeling,2015,12(1):31-53.
- [2] DI PIETRO D,ERN A. A hybrid high-order locking-free method for linear elasticity on general meshes[J]. Computer methods in applied mechanics and engineering,2015,283;1-21.
- [3] BEIRÃO da V L,BREZZI F,CANGIANI A,et al. Basic principle of virtual element methods[J]. Mathematical models and methods in applied sciences,2013,23(1):199-214.
- [4] VACCA G,BEIRÃO da V L. Virtual element methods for parabolic problems on polygonal meshes[J]. Numerical methods for partial differential equations,2015,31(6):2110-2134.
- [5] BREZZI F,FALK R S,MARINI L D. Basic principles of mixed virtual element methods[J]. ESAIM:mathematical modelling and numerical analysis,2014,48(4):1227-1240.
- [6] BEIRÃO da VEIGA L,BREZZI F,MARINI L D,et al. H(div) and H(curl)-conforming virtual element methods[J]. Numerische mathematik,2016,133(2):303-33.
- [7] CHEN L,WANG F. A divergence free weak virtual element method for the Stokes problem on polytopal meshes[J]. Journal of scientific computing,2019,78(2):864-886.
- [8] ERN A,GUERMOND J. Theory and Practice of Finite Elements[M]. Volume 159 of Applied Mathematical series. New York:Springer,2004.

[责任编辑:陆炳新]