doi:10.3969/j.issn.1001-4616.2019.04.006

保险公司最优比例再保险和配对交易策略

黄伯强[1],李启才[2]

(1.南京师范大学中北学院,江苏 南京 210023)
(2.南京师范大学数学科学学院,江苏 南京 210023)

[**摘要**] 考虑保险公司通过比例再保险转移索赔风险和配对交易策略管理财富的优化问题. 利用经典的复合泊松索赔过程描述保险公司的盈余,同时保险公司投资包含一份股票多头和若干份股票空头的配对资产组合,该资产价差服从均值-回复过程.在终端财富期望指数效用最大化的准则下,利用随机控制理论获得最优的比例再保险和投资策略及值函数的解析式.

[**关键词**] 比例再保险,配对交易,价差,最优策略,随机控制

[**中图分类号**]F830.91 [**文献标志码**]A [**文章编号**]1001-4616(2019)04-0039-05

Optimal Proportional Reinsurance and Pairs Trading Polices for Insurer

Huang Boqiang[1],Li Qicai[2]

(1.School of Zhongbei,Nanjing Normal University,Nanjing 210023,China)
(2.School of Mathematical Sciences,Nanjing Normal University,Nanjing 210023,China)

Abstract:This paper discusses optimization problem which the insurer transfer the claims risk by proportional reinsurance and manage the wealth by pairs trading. The surplus of claims is modeled by compound Poisson process. And the insurer can invest it's wealth into pairs portfolio which include a long position on one stock and a short on another stock. The price spread of this pair follows a mean-reverting stochastic process. Under maximizing of expect exponent utility of the terminal wealth,the optimal proportional reinsurance and pairs trading polices and value function are solved by stochastic control theory.

Key words:proportional reinsurance,pairs trading,spread,optimal polices,stochastic control

配对交易自高盛投行投资家 Nunzio Tartaglia 领导的量化团队于上世纪 80 年代中期开发并成功实践以来,已广为金融投资业界采用,并成为学界的研究热点. 配对交易是基于不均衡金融市场环境下实施的一种统计套利策略. Litterman[1]分析了配对交易的逻辑,假定市场当前处于不均衡状态,随着时间推进,市场会逐步走向理性的均衡状态. 投资者投资于某个配对组合,配对组合策略中按一定比例包含一种风险资产的多头和另一种风险资产的空头,两种资产呈现高度相关性,通常其一定价过低,另一定价过高,该组合的价差服从均值回复过程,随着市场均衡的推进,价差将逐步达到均衡. 作为一种市场中性的投资策略,不管市场怎么变化,配对交易策略的收益只取决于两种资产的价差. 该策略从市场动态均衡过程的波动中获得统计套利机会[2]. Fallahpour,Hakimian 等[3]利用协整(Cointegration)方法分析了美国权益市场 2015 年 6 月至 2016 年 1 月的数据,发现优化的配对策略显著地提高了投资收益. Yang T 等[4]利用离散的 Markov 体制转化的均值回复和 Vasicek 价差模型实证分析并构造了基于 S&P500 股票市场 2006 年 1 月至 2012 年 9 月数据的配对投资策略,结果显示简单的配对交易策略获得了更好的业绩. Smith X[5]利用相关距离方法(distance)和协整方法分别讨论了配对组合中两只资产的入选准则和组合比例确定的问题,并研究了配对投资进入和离开时机. Tourin T[6]和 Song Z[7]利用随机控制理论分别研究了最优配对投资额和投资时机问题. 傅毅,张寄洲等[8]基于 A 股 2016 年 3 月至 2016 年 4 月数据模拟了最优配对投资策略的

收稿日期:2019-07-25.
基金项目:国家自然科学基金(11701288)、南京师范大学青蓝工程项目(2016).
通讯联系人:李启才,博士,副教授,研究方向:随机控制理论及其应用. E-mail:17747873@qq.com

收益.

保险公司为了风险控制和资产管理,常采用投资和再保险等工具. 因此,最优投资和再保险策略问题成为研究热点. 本文考虑保险公司的配对投资和再保险问题. 一方面,保险公司面临索赔,为了转移风险,减少损失,保险公司向再保险公司购买比例再保险,同时支付再保险费. 另一方面,保险公司将自身盈余投资于无风险资产和某个配对组合. 在最大化期望指数效用准则下,利用均值-回复价差模型和随机控制理论研究比例再保险的最优自留水平和配对交易的最优投资额. 关于最优投资和再保险的研究论文近年来较多,可参见文献[9-10]等.

本文较前人工作创新之处在于采用配对交易策略研究保险公司的财富管理和风险控制问题. 由于保险公司自身面临索赔,构建配对交易策略后和购买再保险后,盈余过程更加复杂. 利用随机控制方法,我们获得了最优的配对资产投资额和最优的比例再保险自留水平.

1　保险-投资模型

1.1　保险模型

假定$(\Omega,\mathcal{F},P,\mathcal{F}_t:t\geqslant 0)$是包含本文所有随机变量的带 σ 域流的概率空间. 考虑(直接)保险公司的经典风险盈余过程

$$U(t)=u+ct-\sum_{i=1}^{N(t)}Y_i,\tag{1}$$

式中,u 是保险公司的初始资本,c 是保费率. $\{N(t),t\geqslant 0\}$是参数为 λ 的齐次泊松索赔过程,$Y_1,Y_2,\cdots$为非负、独立同分布的索赔额序列,且独立于索赔次数过$\{N(t),t\geqslant 0\}$,记 Y_i 的分布函数为 $F(y)$,其一、二阶矩均有限,分别记为$\mu=E(Y_1)$,$\sigma^2=E(Y_1^2)$.

直保公司按期望值保费原理收取保费,即

$$c=(1+\theta)\lambda\mu,$$

式中,θ 是保险公司的安全载荷系数.

保险公司通过再保险转移、管理风险,通过配对投资实现资产增值. 考虑保险公司的再保险策略为 $H(Y_i)$,$0\leqslant H(Y_i)\leqslant Y_i$,即每次索赔 Y_i,保险公司自负 $H(Y_i)$,剩余的部分 $Y_i-H(Y_i)$由再保险公司支付. 本文采用常用的比例再保险策略,即自留水平 $H(Y_i)=q(T_i)Y_i$,其中,T_i 是第 i 次索赔发生时刻,$i=1,2,\cdots$. 为简单起见,记 $q(T_i)$为 q,称为自留比例.

同样,再保险公司也按期望值保费原理收取再保费,设其安全载荷系数为 η,一般 $\eta>\theta$,称为非便宜再保险. 否则,保险公司可以通过转移所有的索赔风险进行套利.

直保公司支付的再保费为

$$(1+\eta)\lambda E((1-q)Y_i)=(1+\eta)(1-q)\lambda\mu,$$

经过再保险后,保险公司的盈余过程为

$$U^q(t)=u+c^q t-q\sum_{i=1}^{N(t)}Y_i,\tag{2}$$

式中,

$$c^q=(1+\theta)\lambda\mu-(1+\eta)(1-q)\lambda\mu=((1+\eta)q+(\theta-\eta))\lambda\mu,$$

不失一般性,假定索赔强度(单位时间内索赔次数)$\lambda=1$. 根据中心极限定理,匹配均值和方差,可以将上述盈余过程(2)近似为下列扩散盈余过程(参见[9])

$$\mathrm{d}X^q(t)=(\eta q+\theta-\eta)\mu\mathrm{d}t+q\sigma\mathrm{d}B(t),X^q(0)=u,\tag{3}$$

式中,B 是标准布朗运动.

1.2　配对交易策略

根据引言所述,采用配对交易,通过调整组合资产多空的头寸,可以平滑组合风险,达到风险中性和收益最大化的目标. 实践中,可以先在同行业中寻找相关系数绝对值大于某个临界值的两只股票,构成配对组合,相关配对资产和组合比例确定以及价差过程参数估计的统计方法可参见文献[4-6]. 本文设配对资产为股票 $S_1(t)$和股票 $S_2(t)$,即持有一份风险资产 $S_1(t)$多头时,同时做空 n 份风险资产 $S_2(t)$,理论上相

关资产配对组合越丰富,其效果越好,因此本文的研究可以直接推广至多维资产的配对交易上.

假定保险公司财富水平为 $X(t)$,则投资组合价值

$$\frac{(X(t)-\pi(t))}{X(t)}S_0(t)+\frac{\pi(t)}{X(t)}(S_1(t)-nS_2(t)),$$

式中,$S_0(t)$是无风险资产(债券),$\pi(t)$为风险资产(股票)的投资额. 记配对资产价格为 $Y(t)=S_1(t)-nS_2(t)$,根据配对的目标,一般其服从均值回复过程(参见文献[5,7-8])

$$\mathrm{d}Y(t)=\alpha Y(t)(a-\ln Y(t))\mathrm{d}t+bY(t)\mathrm{d}W(t),Y(0)=y_0, \tag{4}$$

式中,配对组合资产初始价格为 y_0,参数 α 为均值回复率,a 为均值回复水平,b 为标准波动率,布朗运动 $W(t)$独立于索赔过程的布朗运动 $B(t)$. 无风险资产价格为

$$\mathrm{d}S_0(t)=rS_0(t)\mathrm{d}t,S_0(0)=1, \tag{5}$$

式中,$r>0$ 是无风险利率.

经配对投资和比例再保险(π,q)后,保险公司的盈余过程 $X^{\pi,q}(t)$满足如下扩散方程

$$\begin{aligned}\mathrm{d}X^{\pi,q}(t)=\pi(t)\frac{\mathrm{d}Y(t)}{Y(t)}+(X^{\pi,q}(t)-\pi(t))\frac{\mathrm{d}S_0(t)}{S_0(t)}+\mathrm{d}X^q(t)=[rX^{\pi,q}(t)+(\alpha(a-\ln Y(t))-r)\pi(t)\mu+\\(q\eta-\eta+\theta)\mu]\mathrm{d}t+\pi(t)b\mathrm{d}W(t)+q\sigma\mathrm{d}B(t).\end{aligned} \tag{6}$$

2 目标函数

本文的目标是保险公司的终端期望效用最大化. 定义优化目标函数为

$$V^{\pi,q}(t,x,y)=E[u(X^{\pi,q}(T))\mid X^{\pi,q}(t)=x,Y(t)=y],$$

式中,效用函数 $u(\cdot)$满足单调和边际效用递减条件,即 $u'(\cdot)>0,u''(\cdot)<0$. 值函数(最优目标函数值)为

$$V(t,x,y)=V^{\pi^*,q^*}(t,x,y)=\sup_{\pi,q}V^{\pi,q}(t,x,y), \tag{7}$$

相应的(π^*,q^*)为最优二维控制策略.

我们使用标准的随机控制理论来解最大化终端期望效用最大化问题. 根据动态规划原理,如果 $V(t,x,y)$足够光滑,则它满足下列 HJB 方程

$$\sup_{\pi,q}A^{\pi,q}V(t,x,y)=0, \tag{8}$$

边界条件为

$$V(T,x,y)=u(x), \tag{9}$$

式中,微分算子

$$\begin{aligned}A^{\pi,q}V(t,x,y)=V_t+[rx+(\alpha(a-\ln y)-r)\pi+(q\eta-\eta+\theta)\mu]V_x+\alpha(a-\ln y)yV_y+\\\frac{1}{2}[\pi^2b^2+q^2\sigma^2]V_{xx}+\frac{1}{2}b^2y^2V_{yy}+\pi b^2yV_{xy}.\end{aligned}$$

定理 1(验证定理) 如果 $W\in C^{1,2}$,满足下列 HJB 方程(8)、(9),那么式(7)给出的值函数等于 W. 记(π^*,q^*)满足

$$A^{\pi^*,q^*}V(t,x,y)=0,$$

那么$(\pi^*(t,X^*(t),Y(t)),q^*(t,X^*(t),Y(t)))$是最优马尔科夫策略.

证明 经典解的验证定理证明是标准的,参见文献[11].

3 最优策略和值函数

本文设保险公司具有下列指数效用

$$u(x)=-\frac{1}{k}\mathrm{e}^{-kx}, \tag{10}$$

式中,风险厌恶系数 $k(>0)$为常数,该效用是在“零效用”原理下唯一得出独立于保险公司盈余水平的公平保费的函数,故常用于保险数学与精算实践[9].

定理 2 指数效用下,最优配对组合资产投资额和比例再保险策略分别是

$$\pi^*(t)=\frac{(2b^2g_2(t)-\alpha)\ln y+\alpha a-r+b^2g_1(t)}{\xi b^2},\quad q^*(t)=\frac{\eta\mu}{\xi\sigma^2}.$$

式中,$g_1(t)$、$g_2(t)$ 由后文式(16)、(17)给出,$\xi=ke^{r(T-t)}$与风险厌恶系数和折现因子有关.

证明　类似文献[8-9],猜想值函数有下列形式解

$$V(t,x,y)=-\frac{1}{k}\exp[-kxe^{r(T-t)}+g(t,y)],$$

边界条件为 $g(T,y)=0$.

有下列微分等式

$$V_t=(xr\xi+g_t)V,V_x=-\xi V,V_y=g_yV,\quad V_{xx}=\xi^2V,V_{yy}=(g_y^2+g_{yy})V,V_{xy}=-\xi g_yV,$$

将上式带到 HJB 方程(8)得到

$$g_t+\alpha(a-\ln y)yg_y+\frac{1}{2}b^2y^2(g_y^2+g_{yy})-\xi(\theta-\eta)\mu+\inf_{\pi}\{f_1(\pi,t)\}+\inf_{q}\{f_2(q,t)\}=0,$$

$$f_1(\pi,t)=-(\alpha(a-\ln y)-r+b^2yg_y)\xi\pi+\frac{1}{2}b^2\xi^2\pi^2,\tag{11}$$

$$f_2(q,t)=-\xi\eta q\mu+\frac{1}{2}\xi^2q^2\sigma^2.$$

根据一阶条件,我们将 $f_1(\pi,t)$ 关于 π 求导,$f_2(q,t)$ 关于 q 求导得到最优策略

$$\pi^*(t)=\frac{\alpha(a-\ln y)-r+b^2yg_y}{\xi b^2},\tag{12}$$

$$q^*(t)=\frac{\eta\mu}{\xi\sigma^2}.\tag{13}$$

只需解出 $g(t,y)$ 就可以得到最优策略,将式(12)、(13)代入方程(11)得到.

$$g_t+ryg_y+\frac{1}{2}b^2y^2g_{yy}-\frac{(\alpha(a-\ln y)-r)^2}{2b^2}+M(t)=0,\tag{14}$$

式中,$M(t)=(\eta-\theta)\xi\mu+\frac{\sigma^2-2}{2\sigma^2}\eta^2\mu^2$ 与 y 无关. 考虑 $g(t,y)$ 的下列形式解

$$\begin{cases}g(t,y)=g_0(t)+g_1(t)\ln y+g_2(t)\ln^2y & t<T\\ g_0(T)=g_1(T)=g_2(T)=0 & t=T\end{cases},\tag{15}$$

以 g_i' 分别表示 $g_i(t)$ 关于 t 的导数,$i=0,1,2$,则 $g(t,y)$ 的偏导数

$$g_t=g_0'+g_1'\ln y+g_2'\ln^2y,yg_y=g_1+2g_2\ln y,y^2g_{yy}=-g_1+2g_2(1-\ln y),$$

代入方程(14)可以得到

$$\left(g_2'-\frac{\alpha^2}{2b^2}\right)\ln^2y+\left(g_1'+(2r-b^2)g_2+\frac{\alpha(\alpha a-r)}{b^2}\right)\ln y+\left(g_0'+\left(r-\frac{b^2}{2}\right)g_1+b^2g_2-\frac{(\alpha a-r)^2}{2b^2}+M(t)\right)=0.$$

因为 y 是变量,故方程(15)各阶变量系数为 0,即有

$$g_0'+\left(r-\frac{b^2}{2}\right)g_1+b^2g_2-\frac{(\alpha a-r)^2}{2b^2}+M(t)=0,$$

$$g_1'+(2r-b^2)g_2+\frac{\alpha(\alpha a-r)}{b^2}=0,$$

$$g_2'-\frac{\alpha^2}{2b^2}=0,$$

结合式(15)中的边界条件,容易解出,

$$g_2(t)=\frac{\alpha^2}{2b^2}(t-T),\tag{16}$$

$$g_1(t)=\left(\frac{1}{4}-\frac{r}{2b^2}\right)\alpha^2(t-T)^2-\frac{\alpha(\alpha a-r)}{b^2}(t-T),\tag{17}$$

$$g_0(t)=\left(\frac{r^2}{6b^2}-\frac{r}{6}+\frac{b^2}{24}\right)\alpha^2(t-T)^3+\left(\frac{\alpha(\alpha a-r)}{2b^2}-\frac{\alpha^2}{4}\right)(t-T)^2+\left[(\eta-\theta)\xi\mu+\frac{\sigma^2-2}{2\sigma^2}\eta^2\mu^2-\frac{(\alpha a-r)^2}{2b^2}\right](T-t).\quad(18)$$

至此得出了最优策略的解析式，证明完成，并且得到最优值函数的表达式.

注 1 最优投资策略可以表示为$\frac{\alpha a-r}{\xi b^2}+\frac{(2b^2g_2(t)-\alpha)}{\xi b^2}\ln y+\frac{g_1(t)}{\xi}$，其中第一项类似于 Merton 投资，与配对资产风险溢价（单位风险的资产收益）$\frac{\alpha a-r}{b^2}$成正比，后面两项是主要根据风险资产资产价格、厌恶系数、时间进行的调节项. 显然投资额与公司的风险厌恶程度 k 成反比.

注 2 最优再比例保险（自留水平）与再保险公司要求的保费 η 成正比，与索赔损失强度（单位风险的索赔损失）μ/σ^2 成正比，与公司的风险厌恶程度 k 成反比.

推论 1 配对组合中股票 $S_1(t)$ 和股票 $S_2(t)$ 的投资额分别为

$$\frac{S_1(t)}{Y(t)}\pi^*(t)\text{和}-\frac{nS_1(t)}{Y(t)}\pi^*(t).$$

证明 根据配对交易策略的构造，每持有 1 份 $S_1(t)$ 多头，就持有 n 份 $S_2(t)$ 空头，每份配对组合的价格为 $Y(t)=S_1(t)-nS_2(t)$，易得结论.

4 结语

本文在终端期望指数效用最大化目标下，考虑了保险公司基于配对交易策略的风险控制和财富管理问题. 利用均值-回复过程刻画配对组合的价差，复合泊松过程描述索赔，利用随机控制理论和方法，得到了最优的比例再保险策略和配对资产头寸的最优额. 基于金融的复杂性（例如常有跳发生），关于保险公司配对投资策略的构建及参数统计模拟方法值得进一步研究.

［参考文献］

[1] LITTERMAN B. Modern Investment Management—an Equilibrium Approach[M]. New York: Wiley, 2003.

[2] GONCU A, AKYILDIRIM E. Statistical arbitrage with pairs trading[J]. International review of finance, 2016, 16(2): 307-319.

[3] FALLAHPOUR S, HAKIMIAN H, TAHERI K, et al. Pairs trading strategy optimization using the reinforcement learning method: a cointegration approach[J]. Soft comput, 2016, 20: 5051-5066.

[4] YANG J, TSAI S, SHYU S, et al. Paring trading: the performance of a stochastic spread model with regime switching-evidence from the S&P500[J]. International review of economics and finance, 2016, 43: 139-150.

[5] SMITH R, XU X. A good pair: alternative pairs-trading strategies[J]. Financ Mark Portf Manag, 2017, 31: 1-26.

[6] TOURIN A, YAN R. Dynamic pairs trading using the stochastic control approach[J]. Journal of economic dynamics & control, 2013, 37: 1972-1981.

[7] SONG Q, ZHANG Q. An optimal pairs-trading rule[J]. Automatica, 2013, 49: 3007-3014.

[8] 傅毅，张寄洲，郭润楠. 基于配对策略的基金动态资产配置[J]. 系统管理学报，2017，26(5)：879-887.

[9] 李启才，顾孟迪. 指数均值回复金融市场下的最优投资和最优再保险策略[J]. 管理工程学报，2016，30(4)：79-84.

[10] 李启才. 两类保险业务时保险公司的调节系数和再保险策略[J]. 南京师大学报（自然科学版），2015，38(4)：42-46.

[11] FLEMING W, SONER H. Controlled Markov Process an Viscosity Solutions[M]. 2nd ed. New York: Spring, 2005.

［责任编辑：陆炳新］