doi:10.3969/j.issn.1001-4616.2020.02.002

Heisenberg 群上内插的 L^∞ 范数估计

陈　平

(江苏第二师范学院数学与信息技术学院,江苏 南京 210013)

[摘要]　本文研究了 Heisenberg 群(H^n,d,L^{2n+1})上费用函数为 $\phi(d(x,y))$ 时最优计划 γ 的内插 μ_t. 其中 ϕ 为严格凸函数.内插的本质就是一种测度. 我们证明了该内插 μ_t 关于 Lebsegue 测度 L^{2n+1} 是绝对连续的,同时也对 μ_t 的 L^∞ 范数进行了估计. 此外,利用这一估计结果,我们还对 Heisenberg 群上的变分逼近问题解的内插 $(e^t\circ S)_{\#}\gamma_\varepsilon$ 进行了估计. 本文的证明主要利用 Heisenberg 群上的 L^{2n+1} 测度收缩性质以及最优运输理论中的循环单调性以及 ϕ 的严格凸性.

[关键词]　Heisenberg 群,内插,L^∞ 范数估计

[中图分类号]O186.14　[文献标志码]A　[文章编号]1001-4616(2020)02-0006-04

L^∞ Norm Estimation of Interpolations on the Heisenberg Group

Chen Ping

(School of Mathematics and Information Technology,Jiangsu Second Normal University,Nanjing 210013,China)

Abstract:In this paper,we discuss the interpolation μ_t of optimal transport plan γ in the Heisenberg group(H^n,d,L^{2n+1}) with the cost function $\phi(d(x,y))$ where ϕ is a strictly convex function. An interpolation is actually a kind of measure. We show that the interpolation μ_t is absolutely continuous with respect to the Lebsegue measure L^{2n+1}. We also give a L^∞ norm estimation on μ_t. Furthermore,as a corollary of the above estimation result,we also estimate the interpolation $(e^t\circ S)_{\#}\gamma_\varepsilon$ of solutions of the variational approximation problem in the Heisenberg group. The main methods we used include the L^{2n+1} measure contraction property of the Heisenberg group,the cyclically monotonicity in the optimal transport theory and the strictly convexity of ϕ.

Key words:Heisenberg group,interpolation,L^∞ norm estimation

在欧式空间中,对于费用函数为 $\phi(y-x)$ 时的内插 μ_t,已经对其进行了 L^p 范数估计,其中 $p\in[1,+\infty]$. 该估计结果可以用来研究欧式空间中传输密度的正则性 $\sigma=\int_0^1\pi_t(|x-y|\gamma)\mathrm{d}t$,详见[1]. 这里 $\pi_t(x,y)=(1-t)x+ty$ 为从 R^n 到 R^n 的映射. 此外,这一正则性估计也是研究欧式空间中费用函数为范数时的最优映射存在性的重要预备结果之一,见[2]. 基于对 Heisenberg 群上最优计划的分类[3]这一前期工作,我们拟研究 Heisenberg 群上传输密度定义的有效性以及正则性,而这一问题的研究基于(H^n,d,L^{2n+1})内插 μ_t 的正则性. 以此为研究背景,本文的主要工作是证明了 Heisenberg 群上内插 μ_t 的绝对连续性并得到 μ_t 的 L^∞ 范数估计.

1　预备知识

设(X,d)为完备的可分的度量空间.μ,ν 为 X 上的概率测度,记为 $\mu,\nu\in P(X)$.X 上的最优运输问题是指以下变分问题:

收稿日期:2019-04-25.

基金项目:国家自然科学基金青年项目(11601193)、2017 年度江苏省高校“青蓝工程”优秀青年骨干教师培养对象计划项目、江苏省高校优秀中青年教师和校长境外研修项目.

通讯作者:陈平,博士,副教授,研究方向:最优运输,偏微分方程,几何分析. E-mail:chenping200507@126.com

$$\min_{\gamma\in\pi(\mu,\nu)}\int_{X\times X}c(x,y)\,\mathrm{d}\gamma(x,y),\tag{1}$$

式中,$c(x,y):X\times X\to(0,+\infty]$称为费用函数,$\mu,\nu$ 称为第一和第二边际测度,集合 $\pi(\mu,\nu)$ 中的元素 γ 称为运输计划,其定义为 $\pi(\mu,\nu)=\{\gamma\in P(X\times X):(\pi_1)_\#\gamma=\mu,(\pi_2)_\#\gamma=\nu\}$,这里 $\pi_1(x,y)=x,\pi_2(x,y)=y$ 分别为对第一和第二变量的典范投影. 称问题(1)的解为最优计划,而(1)的值被称为最优费用.

定义 1[4-5]　对于给定的映射 $T:X\to X$ 以及 $\mu\in P(X)$,$T_\#\mu$ 给出了 X 上的一个概率测度,其定义如下 $(T_\#\mu)(A)=\mu(T^{-1}(A))$,其中 $A\subset X$ 为任意 Borel 集合.

定义 2[4-6]　对于给定的费用函数 $c(x,y)$,称 $\Gamma\subset X\times X$ 为 c-循环单调集合,如果 Γ 中的任意 $k\in N$ 个点对$(x_1,y_1),\cdots,(x_k,y_k)$,有不等式 $\sum\limits_{i=1}^{k}c(x_i,y_i)\leqslant\sum\limits_{i=1}^{k}c(x_i,y_{i+1})$成立,其中 $y_{k+1}=y_1$.

引理 1[4-5]　如果费用函数 $c(x,y)$是下半连续的,且最优费用(1)是有限的,则 γ 是最优运输问题(1)的解当且仅当 γ 集中在 c-循环单调集合 Γ 上,即 $\gamma(X\backslash\Gamma)=0$.

定义 3[7]　设 $\mu,\nu\in P(X)$,如果对任意集合 $A\subset X$,由 $\nu(A)=0$ 可得 $\mu(A)=0$,则称测度 μ 关于测度 ν 绝对连续,并记为 $\mu\ll\nu$. 特别的,当测度 μ 关于 n 维($n\geqslant1$ 为整数)Lebesgue 测度 L^n 绝对连续时,可以定义测度 μ 的密度 $f:X\to[0,+\infty)$,即 $\mu=f\cdot L^n$,如果 $\|f\|_{L^p}$存在,则称 $\|f\|_{L^p}$为测度 μ 的 L^p 范数,记为 $\|\mu\|_{L^p}$,这里 $p\in[1,+\infty)$.

2　Heisenberg 群上的内插

Heisenberg 群(H^n,d,L^{2n+1})是具有分层 Lie 代数单连通的 Lie 群,是次黎曼流形的一种,这里 d 指测地距离.本文主要考虑 Heisenberg 群上的如下最优运输问题:

$$\min_{\gamma\in\pi(\mu,\nu)}\int_{H^n\times H^n}\phi(d(x,y))\,\mathrm{d}\gamma(x,y).\tag{2}$$

这里 $\phi:[0,+\infty)\to\mathbf{R}$ 为下半连续的、具有严格凸性的函数;第一边际测度 μ 关于 Lebesgue 测度 L^{2n+1} 绝对连续,即 $\mu\ll L^{2n+1}$;第二边际测度 ν 为有限原子,即 ν 的支撑集合 spt ν 为有限个点组成的集合. 由最优运输理论[4,5]可知,由于费用函数 $\phi(d(x,y))$是下半连续的,因此问题(2)存在解. 这里我们主要关心与变分问题(2)涉及到的内插 μ_t 的范数估计. 内插 μ_t 的本质是 H^n 上的概率测度. 首先,我们给出有关定义.

定义 4[7]　令 $\Sigma=\{\sigma\}$表示 H^n 上全体极小测地线组成的集合,这里 $\sigma:\begin{matrix}[0,1]\to H^n\\ t\to\sigma(t)\end{matrix}$ 为连接点 $\sigma(0)$和点 $\sigma(1)$的极小测地线. 则对任意给定 $t\in[0,1]$,$e^t:\begin{matrix}\Sigma\to H^n\\ \sigma\to\sigma(t)\end{matrix}$ 称为估值映射. 它将极小测地线 σ 映射成该测地线上的某给定点.

引入映射 $S:\begin{matrix}H^n\times H^n\to\Sigma\\ (x,y)\to\sigma\end{matrix}$,则 $e^t\circ S(x,y)$表示连接 x 和 y 极小测地线上的一个点,该点到 x 的距离为 $td(x,y)$. 此外,对任意一点 $y\in H^n$ 和任意可测集合 $A\subset H^n$,将连接 x 和 A 中任一点 y 的测地线组成的集合记为 $S(A,x)=\{S(y,x):y\in A\}$,将由位于连接 $y\in A$ 和 x 的极小测地线上且到 x 的距离为$(1-t)d(x,y)$的点组合成的集合记为$(e^t\circ S)(A,x)=\{e^t\circ S(y,x):y\in A\}$,并将由位于连接 $y\in A$ 和 x 的极小测地线上且到 x 的距离为 $td(x,y)$的点组合成的集合记为$(e^t\circ S)(x,A)=\{e^t\circ S(x,y):y\in A\}$. 显然有下式成立:$(e^{1-t}\circ S)(x,A)=(e^t\circ S)(A,x)$.

定义 5[4-5,7]　对于上述最优运输问题(2),设 γ 是该问题的解,则对任意 $t\in[0,1]$,Heisenberg 群上内插是指如下测度:$\mu_t=(e^t\circ S)_\#\gamma$.

引理 2[7-8]　Heisenberg 群(H^n,d,L^{2n+1})具有测度收缩性质,即对任意一点 $y\in H^n$ 和任意子集 $A\subset H^n$ 以及任意 $t\in[0,1]$,有下式成立 $L^{2n+1}(A)\leqslant(1-t)^{-2n-3}L^{2n+1}((e^t\circ S)(A,y))$.

定理 1　设 γ 是最优运输问题(2)的解,则对于任意 $t\in[0,1)$,内插 μ_t 具有绝对连续性质和如下 L^∞ 范数估计:

(1)$\mu_t\ll L^{2n+1}$,

(2) $\|\mu_t\|_{L^\infty(H^n)} \leqslant (1-t)^{-2n-3}\|\mu\|_{L^\infty(H^n)}$.

证明　设 $y_i, i=1,\cdots,k$ 为测度 ν 的有限原子,由引理 1 可知,最优计划 γ 集中在某一 $\phi(d(x,y))$-循环单调集合 $\Gamma=\{(x,y_i):x\in H^n\}$. 记 $\Omega_i=\pi_1(\Gamma)$,并设 $\Omega_i(t)=(e^t\circ S)(\Omega_i,y_i)$,其中 $i=1,\cdots,k$,则有 $\Gamma=\bigcup_{i=1}^{k}\Omega_i\times y_i$,此外对任意 Borel 集合 $A\subset H^n$,显然有下式成立:

$$\mu(A)=\gamma(\pi_1^{-1}(A))=\gamma(\pi_1^{-1}(A)\cap\Gamma)=\gamma(\bigcup_{i=1}^{k}A\times y_i). \tag{3}$$

注意到利用反证法可以证明 $\Omega_i(t)\cap\Omega_j(t)=\varnothing$, $\forall i\neq j$. 事实上,假设该结论不成立,即存在 $x\in\Omega_i(t)\cap\Omega_j(t)$,由 ϕ 的严格凸性可得:

$$\begin{gathered}\varphi(d(x_i,y_j))+\varphi(d(x_j,y_i))=\varphi(d(x_i,x)+d(x,y_j))+\varphi(d(x_j,x)+d(x,y_i))=\varphi(td(x_i,y_i)+\\(1-t)d(x_j,y_j))+\varphi(td(x_j,y_j)+(1-t)d(x_i,y_i))<t\varphi(d(x_i,y_i))+(1-t)\varphi(d(x_j,y_j))+\\t\varphi(d(x_j,y_j))+(1-t)\varphi(d(x_i,y_i))=\varphi(d(x_i,y_i))+\varphi(d(x_j,y_j)).\end{gathered}$$

该式与 $\phi(d(x,y))$-循环单调性(见定义 2)矛盾,从而结论得证.

其次我们进行范数估计. 因为 $\mu\ll L^{2n+1}$,记 f 为 μ 的密度,由定义 3 可知 $\mu=f\cdot L^{n+1}$,此外对任意 Borel 集合 $A\subset H^n$,有

$$\mu(A)\leqslant\|f\|_{L^\infty(H^n)}L^{2n+1}(A). \tag{4}$$

再由定义 1 可得

$$\mu_t(A)=(e^t\circ S)\cup\gamma(A)=\gamma((e^t\circ S)^{-1}(A)\cap\bigcup_{i=1}^{k}\Omega_i\times y_i)=\gamma(\bigcup_{i=1}^{k}\tilde{\omega}_i\times y_i),$$

式中,$\tilde{\omega}_i=\pi_1((e^t\circ S)^{-1}(A)\cap\Omega_i\times y_i)$.由(3)式和(4)式可得

$$\mu_t(A)=\mu(\bigcup_{i=1}^{k}\tilde{\omega}_i)\leqslant\|f\|_{L^\infty(H^n)}L^{2n+1}(\bigcup_{i=1}^{k}\tilde{\omega}_i)\leqslant\|f\|_{L^\infty(H^n)}\sum_{i=1}^{k}L^{2n+1}(\tilde{\omega}_i),$$

进一步的,由引理 2 可得

$$\mu_t(A)\leqslant\|f\|_{L^\infty(H^n)}\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{(1-t)^{2n+3}}L^{2n+1}((e^t\circ S)(\tilde{\omega}_i,y_i))=\frac{\|f\|_{L^\infty(H^n)}}{(1-t)^{2n+3}}\sum_{i=1}^{k}L^{2n+1}(A\cap\Omega_i(t)).$$

又因为对任意 $i\neq j$,有 $\Omega_i(t)\cap\Omega_j(t)=\varnothing$,所以

$$\text{上式}=\frac{\|f\|_{L^\infty(H^n)}}{(1-t)^{2n+3}}L^{2n+1}(\bigcup_{i=1}^{k}A\cap\Omega_i(t))\leqslant\frac{\|f\|_{L^\infty(H^n)}}{(1-t)^{2n+3}}L^{2n+1}(A)=\frac{\|\mu\|_{L^\infty(H^n)}}{(1-t)^{2n+3}}L^{2n+1}(A).$$

该式表明 $\mu_t\ll L^{2n+1}$ 成立,并且有估计 $\|\mu_t\|_{L^\infty}\leqslant\dfrac{\|\mu\|_{L^\infty}}{(1-t)^{2n+3}}$ 也成立,从而命题得证.

作为该定理的一个重要推论,我们可以考虑 H^n 上的如下变分逼近问题

$$\min\{C_\varepsilon(\gamma,\nu);\gamma\in\Pi\}. \tag{5}$$

解 γ_ε 的内插 $(e^t\circ S)_\#\gamma_\varepsilon$ 的正则性估计结论. 以下对式(5)中的符号做出说明:$\varepsilon>0$ 为任意常数,$\mu,\nu\in P(H^n)$,$\Pi:=\{\gamma\in P(H^n\times H^n):(\pi_1)_\#\gamma=\mu,\mathrm{spt}((\pi_2)_\#\gamma)\subset K\}$,其中 $K\subset H^n$ 为紧集,且满足 $\mathrm{spt}(\mu)\cup\mathrm{spt}(\nu)\subset K$. 此外

$$\begin{gathered}C_\varepsilon(\gamma,\nu)=\frac{1}{\varepsilon}W_1((\pi_2)_\#\gamma,\nu)+\int_{H^n\times H^n}d(x,y)\mathrm{d}\gamma(x,y)+\varepsilon\int_{H^n\times H^n}\phi(d(x,y))\mathrm{d}\gamma(x,y)+\\\varepsilon^{3n+2}\mathrm{Card}(\mathrm{spt}((\pi_2)_\#\gamma)),\end{gathered}$$

式中,$W_1(\mu,\nu)$ 是测度 μ,ν 的 1-Wasserstein 距离,即

$$\min_{\gamma\in\pi(\mu,\nu)}\int_{H^n\times H^n}d(x,y)\mathrm{d}\gamma(x,y). \tag{6}$$

该定义可见[5],$\phi:[0,+\infty)\to\mathbf{R}$ 是任意严格凸函数,$\mathrm{Card}(A)$ 表示集合 A 的基数.此外,1-Wasserstein 距离即为问题(1)中 X 取为 H^n,$c(x,y)$ 取为测地距离 $d(x,y)$ 时的特殊情形.

式(5)称为变分逼近问题的原因在于,对任意 $\varepsilon>0$,由变分法的直接方法可得(5)存在解,记为 γ_ε,文献[7]证明了当 $\phi(d(x,y))=d^2(x,y)$ 时,γ_ε 的弱收敛极限即为问题(6)的解.

为了研究 H^n 上 Monge 问题 $\min\limits_{T_\#\mu=\nu}\int_{H^n\times H^n}d(x,T(x))\mathrm{d}\mu(x)$ 解的存在性,其中 μ,ν 是 H^n 上两个具有紧支

撑的概率测度,我们可以考虑 $\phi(\cdot)$ 为任意凸函数时变分逼近问题(5)的解 γ_ε 的弱极限 γ. 如果可以证明 γ 的支撑集合 spt γ 可以表示为一个图,则可以证明 $\gamma=(id\times T)_\#\mu$,从而 T 即为所求 Monge 问题的解. 这里称 spt γ 为一个图是指对任意 (x_0,y_0),$(x_0,y_1)\in$ spt γ,有 $y_0=y_1$ 成立. 为了证明 Monge 问题解 T 的存在性,一个关键的过程是对变分逼近问题(5)的解 γ_ε 的内插进行正则性估计,从而得到弱极限 γ 的内插的正则性估计,而这一估计可以视为定理 1 的推论.

推论 1　设 $\varepsilon>0$,γ_ε 是问题(5)的解,B 是 $H^n\times H^n$ 的 Borel 子集,令 $\mu_{\varepsilon,B}:=(\pi_1)_\#(\gamma_\varepsilon|_B)$,则有如下 L^∞ 范数估计成立:$\|(e^t\circ S)_\#(\gamma_\varepsilon|_B)\|_{L^\infty(H^n)}\leqslant\dfrac{\|\mu_{\varepsilon,B}\|_{L^\infty(H^n)}}{(1-t)^{2n+3}}$,其中 $t\in[0,1)$.

证明　设 $\nu_{\varepsilon,B}:=(\pi_2)_\#(\gamma_\varepsilon|_B)$.因为 γ_ε 是问题(5)的解,因此 γ_ε 也是如下变分问题的解:

$$\min\left\{\int_{H^n\times H^n}d(x,y)+\varepsilon\phi(d(x,y))\,\mathrm{d}\gamma(x,y):\gamma\in\pi(\mu,(\pi_2)_\#\gamma_\varepsilon)\right\}.$$

更进一步的,$\gamma_\varepsilon|_B$ 是如下问题的解:

$$\min\left\{\int_{H^n\times H^n}d(x,y)+\varepsilon\phi(d(x,y))\,\mathrm{d}\gamma(x,y):\gamma\in\pi(\mu_{\varepsilon,B},\nu_{\varepsilon,B})\right\}.$$

令 $\phi^*(x)=x+\varepsilon\phi(x):[0,+\infty)\to\mathbf{R}$,因为 ϕ 是严格凸函数,所以 ϕ^* 也是严格凸函数. 更进一步,$\gamma_\varepsilon|_B$ 是最优运输问题(2)的解,其中 μ 取为 $\mu_{\varepsilon,B}\ll L^{2n+1}$,$\nu$ 取为 $\nu_{\varepsilon,B}$,而费用函数为严格凸函数 ϕ^*,因此由定理 1 可知结论成立.

[参考文献]

[1]　SANTAMBROGIO F. Absolute continuity and summability of optimal transport densities:simpler proofs and new estimates[J]. Calculus of variations and partial differential equations,2009,36(3):343-354.

[2]　CHAMPION T,PASCALE L D. The monge's problem in Rd[J]. Duke mathematical journal,2011,157:551-572.

[3]　陈平. Heisenberg 群上最优计划的分类[J]. 江苏第二师范学院学报(自然科学版),2016,32(12):11-14.

[4]　VILLANI C. Topics in optiral transportation[M]. Providence:American Mathematical Society,2003.

[5]　VILLANI C. Optimal transport:old and new[M]. New York:Springer Science and Business Media,2008.

[6]　陈平. 几个最优映射存在唯一性定理的统一证明[J]. 南京师大学报(自然科学版),2015,38(4):82-85.

[7]　DE PASCALE L,RIGOT S. Monge's transport problem in the Heisenberg group[J]. Advances in calculus of variations,2011,4(2):195-227.

[8]　JUILLET N. Geometric inequalities and generalized ricci bounds in the heisenberg group[J]. International mathematics research notices,2009,13:2347-2373.

[责任编辑:陆炳新]