第 43 卷第 3 期 南京师大学报(自然科学版) Vol. 43 No. 3
2020 年 9 月 JOURNAL OF NANJING NORMAL UNIVERSITY(Natural Science Edition) Sept,2020

doi:10.3969/j.issn.1001-4616.2020.03.002

关于微分算子 Δ^2+a 的一个注记

戴绍虞[1],潘一飞[2]

(1.金陵科技学院理学院,江苏 南京 211169)
(2.美国普渡大学韦恩堡校区数学系,印第安纳州 韦恩堡 46805)

[摘要] 本文利用复分析中研究柯西黎曼方程的赫曼德尔 L^2 方法,研究了加权希尔伯特空间 $L^2(\mathbf{R}^2,\mathrm{e}^{-|x|^2})$ 上的微分算子 Δ^2+a,证明了由该算子所构成的微分方程的整体弱解的存在性,并证明了该算子的右逆有界算子的存在性.

[关键词] 赫曼德尔 L^2 方法,加权希尔伯特空间,微分算子
[中图分类号]O177.92 [文献标志码]A [文章编号]1001-4616(2020)03-0007-05

A Note on the Differential Operator Δ^2+a

Dai Shaoyu[1],Pan Yifei[2]

(1.Jingling Institute of Technology,Nanjing 211169,China)
(2.Purdue University Fort Wayne,Fort Wayne 46805,USA)

Abstract:Using Hormander L^2 method for Cauchy-Riemann equations from complex analysis,we study a simple differential operator Δ^2+a in weighted Hilbert space $L^2(\mathbf{R}^2,\mathrm{e}^{-|x|^2})$. We prove the existence of global weak solutions of the equation about the differential operator and the existence of a right bounded inverse of the differential operator.

Key words:Hormander L^2 method,weighted Hilbert space,differential operator

本文的主要论题是研究加权希尔伯特空间 $L^2(\mathbf{R}^2,\mathrm{e}^{-|x|^2})$ 上的微分算子 Δ^2+a. a 是一个实常数. 我们利用复分析中研究柯西黎曼方程的赫曼德尔 L^2 方法[1-3],证明了由该算子所构成的微分方程的整体弱解的存在性,并证明了该算子的右逆有界算子的存在性.

为了便于叙述,首先介绍文中要用到的有关符号和概念. 记加权希尔伯特空间

$$L^2(\mathbf{R}^n,\mathrm{e}^{-\varphi})=\left\{f\mid f\in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n);\int_{\mathbf{R}^n}f^2\mathrm{e}^{-\varphi}\mathrm{d}x<+\infty\right\},$$

式中,φ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的非负函数. 设此空间中函数的内积和范数分别为

$$\langle f,g\rangle_\varphi=\int_{\mathbf{R}^n}fg\mathrm{e}^{-\varphi}\mathrm{d}x,\quad \|f\|_\varphi=\sqrt{\langle f,f\rangle_\varphi}.$$

记 $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上具有紧支集的光滑函数的全体. 设 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 是一个 n 维的多重指标,且 $|\alpha|\geqslant 1$,记 $D^\alpha:=\dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1}\partial_{x_2}^{\alpha_2}\cdots\partial_{x_n}^{\alpha_n}}$为 α 阶偏导数微分算子. 给定 $u,f\in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)$,当对所有 $\phi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$,有

$$\int_{\mathbf{R}^n}uD^\alpha\phi\mathrm{d}x=(-1)^{|\alpha|}\int_{\mathbf{R}^n}f\phi\mathrm{d}x$$

时,我们称 f 是 u 的弱 α 阶偏导数.

泊松方程[4]是偏微分方程中经常研究的方程,它考虑的算子是拉普拉斯算子 Δ. 在[5]中,我们讨论了加权希尔伯特空间 $L^2(\mathbf{R}^n,\mathrm{e}^{-|x|^2})$ 中的算子 $\Delta+a$,并且得到了如下结论:

收稿日期:2020-04-17.
基金项目:国家自然科学基金项目(11671361).
通讯作者:戴绍虞,博士,副教授,研究方向:多复变函数论. E-mail:dymdsy@163.com

定理 A　给定 $L^2(\mathbf{R}^n, e^{-|x|^2})$ 中任意一个函数 f,总存在一个弱解 $u \in L^2(\mathbf{R}^n, e^{-|x|^2})$ 使得方程

$$\Delta u + au = f$$

在 $\mathbf{R}^n$ 中成立,且有范数估计

$$\int_{\mathbf{R}^n} u^2 e^{-|x|^2} dx \leqslant \frac{1}{8n} \int_{\mathbf{R}^n} f^2 e^{-|x|^2} dx.$$

受定理 A 的启发,我们有兴趣研究加权希尔伯特空间上的微分算子 Δ^2+a. 本文研究当 $n=2$ 时,加权希尔伯特空间 $L^2(\mathbf{R}^2, e^{-|x|^2})$ 上的微分算子 Δ^2+a,我们得到如下结论:

定理 1　给定 $L^2(\mathbf{R}^2, e^{-|x|^2})$ 中任意一个函数 f,总存在一个弱解 $u \in L^2(\mathbf{R}^2, e^{-|x|^2})$ 使得方程

$$\Delta^2 u + au = f$$

在 $\mathbf{R}^2$ 中成立,且有范数估计

$$\int_{\mathbf{R}^2} u^2 e^{-|x|^2} dx \leqslant \frac{1}{1\ 024} \int_{\mathbf{R}^2} f^2 e^{-|x|^2} dx.$$

此外,本文的新奇之处在于所讨论的微分算子具有右逆有界算子,结论如下:

定理 2　存在有界算子 $T: L^2(\mathbf{R}^2, e^{-|x|^2}) \to L^2(\mathbf{R}^2, e^{-|x|^2})$ 使得

$$(\Delta^2 + a) T = I,$$

且 $\| T \| \leqslant 1/32$,其中 I 是恒等算子, $\| T \|$ 是算子 T 的范数.

1　主要引理

注意到当 $n=2$ 时,$\Delta^2 = D^{(4,0)} + D^{(0,4)} + 2D^{(2,2)}$,为了便于叙述,设

$$a_1 = a_2 = 1, a_3 = 2, D^{\alpha_1} = D^{(4,0)}, D^{\alpha_2} = D^{(0,4)}, D^{\alpha_3} = D^{(2,2)}, H = \Delta^2 + a = \sum_{i=1}^{3} a_i D^{\alpha_i} + a.$$

设 φ 是 $\mathbf{R}^2$ 上的非负光滑函数. 对 $i=1,2,3$ 和任意的 $\phi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$,我们首先定义 D^{α_i}在 $L^2(\mathbf{R}^2, e^{-\varphi})$ 中的关于加权内积的形式伴随算子. 设 $u \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^2)$,我们计算如下:

$$\langle \phi, D^{\alpha_i} u \rangle_\varphi = \int_{\mathbf{R}^2} \phi D^{\alpha_i} u e^{-\varphi} dx = (-1)^4 \int_{\mathbf{R}^2} u D^{\alpha_i}(\phi e^{-\varphi}) dx =$$

$$\int_{\mathbf{R}^2} e^{\varphi} u D^{\alpha_i}(\phi e^{-\varphi}) e^{-\varphi} dx = \langle e^{\varphi} D^{\alpha_i}(\phi e^{-\varphi}), u \rangle_\varphi = \langle D_\varphi^{\alpha_i *} \phi, u \rangle_\varphi,$$

式中,$D_\varphi^{\alpha_i *}\phi$ 是 D^{α_i}的形式伴随算子,且在 $C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$ 上有 $D_\varphi^{\alpha_i *}\phi = e^{\varphi} D^{\alpha_i}(\phi e^{-\varphi})$. 设 H_φ^* 是 H 的在 $L^2(\mathbf{R}^2, e^{-\varphi})$ 中的关于加权内积的形式伴随算子,因为对于恒等算子有 $I_\varphi^* = I$,所以 $H_\varphi^* = \sum_{i=1}^{3} a_i D_\varphi^{\alpha_i *} + a$.

下面基于泛函分析给出几个主要引理.

引理 1　给定 $L^2(\mathbf{R}^2, e^{-\varphi})$ 中任意一个函数 f,总存在一个弱解 $u \in L^2(\mathbf{R}^2, e^{-\varphi})$,使得方程 $Hu=f$ 在 $\mathbf{R}^2$ 中成立,且有范数估计 $\| u \|_\varphi^2 \leqslant c$ 的充要条件是

$$|\langle f, \phi \rangle_\varphi|^2 \leqslant c \| H_\varphi^* \phi \|_\varphi^2, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2),$$

式中,c 是一个常数.

证明(必要性)　对任意的 $\phi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$,由 H_φ^* 的定义和柯西-施瓦茨不等式,可得

$$|\langle f, \phi \rangle_\varphi|^2 = |\langle Hu, \phi \rangle_\varphi|^2 = |\langle u, H_\varphi^* \phi \rangle_\varphi|^2 \leqslant \| u \|_\varphi^2 \| H_\varphi^* \phi \|_\varphi^2 \leqslant c \| H_\varphi^* \phi \|_\varphi^2.$$

(充分性)考虑 $L^2(\mathbf{R}^2, e^{-\varphi})$ 的子空间 $E = \{ H_\varphi^* \phi \mid \phi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2) \}$. 定义线性泛函 $L_f: E \to \mathbf{R}$ 为

$$L_f(H_\varphi^* \phi) = \langle f, \phi \rangle_\varphi = \int_{\mathbf{R}^2} f \phi e^{-\varphi} dx.$$

因为$|L_f(H_\varphi^* \phi)| = |\langle f, \phi \rangle_\varphi| \leqslant \sqrt{c} \| H_\varphi^* \phi \|_\varphi$,所以 L_f 是 E 上的一个有界线性泛函. 设 $\bar{E}$ 是 E 的闭包. 注意到 $\bar{E}$ 是 $L^2(\mathbf{R}^2, e^{-\varphi})$ 的一个希尔伯特子空间,所以由哈恩-巴拿赫延拓定理知,L_f 可被延拓成 $\bar{E}$ 上的线性泛函 $\tilde{L}_f$,使得

$$|\tilde{L}_f(g)| \leqslant \sqrt{c} \| g \|_\varphi, \quad \forall g \in \bar{E}. \tag{1}$$

对 $\tilde{L}_f$ 使用黎斯表示定理,可知存在唯一一个 $u_0\in\bar{E}$,使得

$$\tilde{L}_f(g)=\langle u_0,g\rangle_\varphi,\quad \forall g\in\bar{E}. \tag{2}$$

现在我们来证明 $Hu_0=f$. 对任意的 $\phi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$,在(2)中应用 $g=H_\varphi^*\phi$. 那么有 $\tilde{L}_f(H_\varphi^*\phi)=\langle u_0,H_\varphi^*\phi\rangle_\varphi=\langle Hu_0,\phi\rangle_\varphi$. 注意到 $\tilde{L}_f(H_\varphi^*\phi)=L_f(H_\varphi^*\phi)=\langle f,\phi\rangle_\varphi$. 所以,对任意的 $\phi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$,有 $\langle Hu_0,\phi\rangle_\varphi=\langle f,\phi\rangle_\varphi$,即 $\int\limits_{\mathbf{R}^2}Hu_0\phi e^{-\varphi}dx=\int\limits_{\mathbf{R}^2}f\phi e^{-\varphi}dx$. 因此,$Hu_0=f$.

接下来证明 u_0 的范数的界. 在(1)和(2)中,令 $g=u_0$. 那么我们有 $\|u_0\|_\varphi^2=|\langle u_0,u_0\rangle_\varphi|=|\tilde{L}_f(u_0)|\leqslant\sqrt{c}\,\|u_0\|_\varphi$. 所以,$\|u_0\|_\varphi^2\leqslant c$.

注意到 $u_0\in\bar{E}$ 和 $\bar{E}\subset L^2(\mathbf{R}^2,e^{-\varphi})$. 那么 $u_0\in L^2(\mathbf{R}^2,e^{-\varphi})$. 设 $u=u_0$. 所以存在 $u\in L^2(\mathbf{R}^2,e^{-\varphi})$ 使得 $Hu=f$,且 $\|u\|_\varphi^2\leqslant c$. 引理得证.

引理 2 对任意的 $\phi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$,有

$$\|H_\varphi^*\phi\|_\phi^2=\|H\phi\|_\varphi^2+\sum_{i,j=1}^{3}a_ia_j<\phi,D^{\alpha_j}D_\varphi^{\alpha_i*}\phi-D_\varphi^{\alpha_j*}D^{\alpha_i}\phi>_\varphi.$$

证明 对任意的 $\phi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$,

$$\begin{aligned}\|H_\varphi^*\phi\|_\varphi^2&=\langle H_\varphi^*\phi,H_\varphi^*\phi\rangle_\varphi=\langle\phi,HH_\varphi^*\phi\rangle_\varphi=\langle\phi,H_\varphi^*H\phi\rangle_\varphi+\langle\phi,HH_\varphi^*\phi-H_\varphi^*H\phi\rangle_\varphi=\\&\langle H\phi,H\phi\rangle_\varphi+\langle\phi,HH_\varphi^*\phi-H_\varphi^*H\phi\rangle_\varphi=\|H\phi\|_\varphi^2+\langle\phi,HH_\varphi^*\phi-H_\varphi^*H\phi\rangle_\varphi.\end{aligned} \tag{3}$$

设 $a_0=a,I=D^{\alpha_0}$,那么

$$HH_\varphi^*\phi-H_\varphi^*H\phi=\sum_{i,j=0}^{3}a_ia_jD^{\alpha_j}D_\varphi^{\alpha_i*}\phi-\sum_{i,j=0}^{3}a_ia_jD_\varphi^{\alpha_j*}D^{\alpha_i}\phi=\sum_{i,j=1}^{3}a_ia_j(D^{\alpha_j}D_\varphi^{\alpha_i*}\phi-D_\varphi^{\alpha_j*}D^{\alpha_i}\phi). \tag{4}$$

所以由(3)和(4),引理得证.

引理 3 设 $\varphi=|x|^2$,则对任意的 $\phi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$,有

$$\sum_{i,j=1}^{3}a_ia_j\langle\phi,D^{\alpha_j}D_\varphi^{\alpha_i*}\phi-D_\varphi^{\alpha_j*}D^{\alpha_i}\phi\rangle_\varphi\geqslant 1\,024\|\phi\|_\varphi^2.$$

证明 注意到对 $i=1,2,3$,有 $D_\varphi^{\alpha_i*}\phi=e^\varphi D^{\alpha_i}(\phi e^{-\varphi})$. 为书写方便,设

$$A_{ij}=\langle\phi,D^{\alpha_j}D_\varphi^{\alpha_i*}\phi-D_\varphi^{\alpha_j*}D^{\alpha_i}\phi\rangle_\varphi.$$

我们先来计算 A_{11}. 因为

$$A_{11}=\langle\phi,D^{\alpha_1}D_\varphi^{\alpha_1*}\phi-D_\varphi^{\alpha_1*}D^{\alpha_1}\phi\rangle_\varphi=\langle\phi,D^{\alpha_1}D_\varphi^{\alpha_1*}\phi\rangle_\varphi-\langle\phi,D_\varphi^{\alpha_1*}D^{\alpha_1}\phi\rangle_\varphi, \tag{5}$$

所以下面分别计算 $\langle\phi,D^{\alpha_1}D_\varphi^{\alpha_1*}\phi\rangle_\varphi$ 和 $\langle\phi,D_\varphi^{\alpha_1*}D^{\alpha_1}\phi\rangle_\varphi$. 由于

$$D_\varphi^{\alpha_1*}\phi=e^\varphi D^{\alpha_1}(\phi e^{-\varphi})=e^\varphi D^{(4,0)}(\phi e^{-\varphi})=\sum_{i=0}^{4}\binom{4}{i}(D^{(4-i,0)}\phi)P_i, \tag{6}$$

式中,

$$P_i=\begin{cases}1 & i=0,\\ -2x_1 & i=1,\\ -2+4x_1^2 & i=2,\\ 12x_1-8x_1^3 & i=3,\\ 12-48x_1^2+16x_1^4 & i=4,\end{cases}$$

那么

$$D^{\alpha_1}D_\varphi^{\alpha_1*}\phi=D^{(4,0)}\left(\sum_{i=0}^{4}\binom{4}{i}(D^{(4-i,0)}\phi)P_i\right)=\sum_{i=0}^{4}\sum_{j=0}^{4}\binom{4}{i}\binom{4}{j}(D^{(8-i-j,0)}\phi)(D^{(j,0)}P_i).$$

注意到

$$D^{(j,0)}P_i=\begin{cases}0, & j>i,\\ \dfrac{i!\,(-1)^j2^j}{(i-j)!}P_{i-j}, & j\leqslant i,\end{cases}$$

和

$$\binom{4}{i}\binom{4}{j}\frac{i!\,(-1)^j2^j}{(i-j)!}=\frac{(-1)^j2^j(4!)^2}{j!\,((4-j)!)^2}\binom{4-j}{i-j},$$

则

$$D^{\alpha_1}D_\varphi^{\alpha_1 *}\phi=\sum_{0\leqslant j\leqslant i\leqslant 4}\binom{4}{i}\binom{4}{j}(D^{(8-i-j,0)}\phi)\frac{i!\,(-1)^j2^j}{(i-j)!}P_{i-j}=$$
$$\sum_{0\leqslant j\leqslant i\leqslant 4}\frac{(-1)^j2^j(4!)^2}{j!\,((4-j)!)^2}\binom{4-j}{i-j}(D^{(8-i-j,0)}\phi)P_{i-j}=$$
$$\sum_{j\leqslant 4,s\leqslant 4-j}\frac{(-1)^j2^j(4!)^2}{j!\,((4-j)!)^2}\binom{4-j}{s}(D^{(8-2j-s,0)}\phi)P_s.$$

注意到 $P_s\mathrm{e}^{-\varphi}=D^{(s,0)}\mathrm{e}^{-\varphi}$,则

$$(D^{\alpha_1}D_\varphi^{\alpha_1 *}\phi)\mathrm{e}^{-\varphi}=\sum_{j\leqslant 4,s\leqslant 4-j}\frac{(-1)^j2^j(4!)^2}{j!\,((4-j)!)^2}\binom{4-j}{s}(D^{(8-2j-s,0)}\phi)(D^{(s,0)}\mathrm{e}^{-\varphi})=$$
$$\sum_{j\leqslant 4}\frac{(-1)^j2^j(4!)^2}{j!\,((4-j)!)^2}D^{(4-j,0)}((D^{(4-j,0)}\phi)\mathrm{e}^{-\varphi}).$$

那么

$$\langle\phi,D_\varphi^{\alpha_1 *}D^{\alpha_1}\phi\rangle_\varphi=\int_{\mathbf{R}^2}\phi(D^{\alpha_1}D_\varphi^{\alpha_1 *}\phi)\mathrm{e}^{-\varphi}\mathrm{d}x=$$
$$\sum_{j\leqslant 4}\frac{2^j(4!)^2}{j!\,((4-j)!)^2}\int_{\mathbf{R}^2}(D^{(4-j,0)}\phi)(D^{(4-j,0)}\phi)\mathrm{e}^{-\varphi}\mathrm{d}x=$$
$$\sum_{j\leqslant 4}\frac{2^j(4!)^2}{j!\,((4-j)!)^2}\|D^{(4-j,0)}\phi\|_\varphi^2. \tag{7}$$

由(6)可得

$$D_\varphi^{\alpha_1 *}D^{\alpha_1}\phi=D_\varphi^{\alpha_1 *}D^{(4,0)}\phi=\sum_{i=0}^{4}\binom{4}{i}(D^{(8-i,0)}\phi)P_i.$$

注意到 $P_i\mathrm{e}^{-\varphi}=D^{(i,0)}\mathrm{e}^{-\varphi}$,则

$$(D_\varphi^{\alpha_1 *}D^{\alpha_1}\phi)\mathrm{e}^{-\varphi}=\sum_{i=0}^{4}\binom{4}{i}(D^{(8-i,0)}\phi)(D^{(i,0)}\mathrm{e}^{-\varphi})=D^{(4,0)}((D^{(4,0)}\phi)\mathrm{e}^{-\varphi}).$$

那么

$$\langle\phi,D_\varphi^{\alpha_1 *}D^{\alpha_1}\varphi\rangle_\varphi=\int_{\mathbf{R}^2}\phi(D_\varphi^{\alpha_1 *}D^{\alpha_1}\phi)\mathrm{e}^{-\varphi}\mathrm{d}x=\int_{\mathbf{R}^2}(D^{(4,0)}\phi)(D^{(4,0)}\phi)\mathrm{e}^{-\varphi}\mathrm{d}x=\|D^{(4,0)}\phi\|_\varphi^2. \tag{8}$$

所以由式(5)、式(7)、式(8)可得

$$A_{11}=\sum_{1\leqslant j\leqslant 4}\frac{2^j(4!)^2}{j!\,((4-j)!)^2}\|D^{(4-j,0)}\phi\|_\varphi^2=$$
$$32(\|D^{(3,0)}\phi\|_\varphi^2+9\|D^{(2,0)}\phi\|_\varphi^2+24\|D^{(1,0)}\phi\|_\varphi^2+12\|\phi\|_\varphi^2).$$

用上述方法同样可计算得

$$A_{12}=A_{21}=0,$$
$$A_{13}=A_{31}=16(\langle D^{(3,0)}\phi,D^{(1,2)}\phi\rangle_\varphi+3\langle D^{(2,0)}\phi,D^{(0,2)}\phi\rangle_\varphi),$$
$$A_{22}=32(\|D^{(0,3)}\phi\|_\varphi^2+9\|D^{(0,2)}\phi\|_\varphi^2+24\|D^{(0,1)}\phi\|_\varphi^2+12\|\phi\|_\varphi^2),$$
$$A_{23}=A_{32}=16(\langle D^{(0,3)}\phi,D^{(2,1)}\phi\rangle_\varphi+3\langle D^{(2,0)}\phi,D^{(0,2)}\phi\rangle_\varphi),$$
$$A_{33}=8(\|D^{(2,1)}\phi\|_\varphi^2+\|D^{(2,0)}\phi\|_\varphi^2+\|D^{(0,2)}\phi\|_\varphi^2+\|D^{(1,2)}\phi\|_\varphi^2)+$$
$$64(\|D^{(1,1)}\phi\|_\varphi^2+\|D^{(1,0)}\phi\|_\varphi^2+\|D^{(0,1)}\phi\|_\varphi^2+\|\phi\|_\varphi^2).$$

所以

$$\sum_{i,j=1}^{3}a_ia_j\langle\phi,D^{\alpha_j}D_\varphi^{\alpha_i *}\phi-D_\varphi^{\alpha_j *}D^{\alpha_i}\phi\rangle_\varphi=A_{11}+2A_{12}+2A_{21}+4A_{13}+4A_{31}+A_{22}+4A_{23}+4A_{32}+4A_{33}=$$

$$32(\|D^{(3,0)}\phi\|_\varphi^2+\|D^{(0,3)}\phi\|_\varphi^2+10\|D^{(2,0)}\phi\|_\varphi^2+10\|D^{(0,2)}\phi\|_\varphi^2+32\|D^{(1,0)}\phi\|_\varphi^2+32\|D^{(0,1)}\phi\|_\varphi^2+ \\ \|D^{(2,1)}\phi\|_\varphi^2+\|D^{(1,2)}\phi\|_\varphi^2+8\|D^{(1,1)}\phi\|_\varphi^2+32\|\phi\|_\varphi^2+2\langle D^{(3,0)}\phi,D^{(1,2)}\phi\rangle_\varphi+2\langle D^{(0,3)}\phi,D^{(2,1)}\phi\rangle_\varphi+ \\ 12\langle D^{(2,0)}\phi,D^{(0,2)}\phi\rangle_\varphi)\geqslant 32(\|D^{(3,0)}\phi\|_\varphi^2+\|D^{(1,2)}\phi\|_\varphi^2+2\langle D^{(3,0)}\phi,D^{(1,2)}\phi\rangle_\varphi)+ \\ 32(\|D^{(0,3)}\phi\|_\varphi^2+\|D^{(2,1)}\phi\|_\varphi^2+2\langle D^{(0,3)}\phi,D^{(2,1)}\phi\rangle_\varphi)+32(10\|D^{(2,0)}\phi\|_\varphi^2+ \\ 10\|D^{(0,2)}\phi\|_\varphi^2+12\langle D^{(2,0)}\phi,D^{(0,2)}\phi\rangle_\varphi)+1\ 024\|\phi\|_\varphi^2.$$

注意到由柯西-施瓦茨不等式,

$$\|D^{(3,0)}\phi\|_\varphi^2+\|D^{(1,2)}\phi\|_\varphi^2+2\langle D^{(3,0)}\phi,D^{(1,2)}\phi\rangle_\varphi\geqslant 0,$$
$$\|D^{(0,3)}\phi\|_\varphi^2+\|D^{(2,1)}\phi\|_\varphi^2+2\langle D^{(0,3)}\phi,D^{(2,1)}\phi\rangle_\varphi\geqslant 0,$$
$$10\|D^{(2,0)}\phi\|_\varphi^2+10\|D^{(0,2)}\phi\|_\varphi^2+12\langle D^{(2,0)}\phi,D^{(0,2)}\phi\rangle_\varphi\geqslant 0,$$

所以,引理得证.

2 定理的证明

我们先给出定理 1 的证明.

证明 设 $\varphi=|x|^2$,由引理 2 和引理 3 知,对任意的 $\phi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$,有

$$\|H_\varphi^*\phi\|_\varphi^2\geqslant 1\ 024\|\phi\|_\varphi^2.$$

则由柯西-施瓦茨不等式,可得对任意的 $\phi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$,

$$|\langle f,\phi\rangle_\varphi|^2\leqslant\|f\|_\varphi^2\|\phi\|_\varphi^2=\left(\frac{1}{1\ 024}\|f\|_\varphi^2\right)(1\ 024\phi_\varphi^2)\leqslant\left(\frac{1}{1\ 024}\|f\|_\varphi^2\right)\|H_\varphi^*\phi\|_\varphi^2.$$

设 $c=\frac{1}{1\ 024}\|f\|_\varphi^2$. 则有

$$|\langle f,\phi\rangle_\varphi|^2\leqslant c\|H_\varphi^*\phi\|_\varphi^2,\ \forall\phi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^2).$$

由引理 1 知,存在一个弱解 $u\in L^2(\mathbf{R}^2,\mathrm{e}^{-\varphi})$ 使得方程 $Hu=f$ 在 $\mathbf{R}^2$ 中成立,且有范数估计 $\|u\|_\varphi^2\leqslant c$,即 $\int_{\mathbf{R}^2}u^2\mathrm{e}^{-|x|^2}\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{1\ 024}\int_{\mathbf{R}^2}f^2\mathrm{e}^{-|x|^2}\mathrm{d}x$. 定理得证.

下面我们给出定理 2 的证明.

证明 设 $\varphi=|x|^2$,由定理 1 知,对 $L^2(\mathbf{R}^2,\mathrm{e}^{-|x|^2})$ 中任意一个函数 f,总存在一个弱解 $u\in L^2(\mathbf{R}^2,\mathrm{e}^{-|x|^2})$ 使得方程 $Hu=f$ 在 $\mathbf{R}^2$ 中成立,且有

$$\|u\|_\varphi\leqslant\frac{1}{32}\|f\|_\varphi.$$

记这个 u 为 $T(f)$,则 $T(f)$ 满足 $HT(f)=f$,且有

$$\|T(f)\|_\varphi\leqslant\frac{1}{32}\|f\|_\varphi.$$

注意到 f 是 $L^2(\mathbf{R}^2,\mathrm{e}^{-|x|^2})$ 中任意的一个函数,所以 $T:L^2(\mathbf{R}^2,\mathrm{e}^{-|x|^2})\to L^2(\mathbf{R}^2,\mathrm{e}^{-|x|^2})$ 是一个有界算子,使得 $HT=I$,且有 $\|T\|\leqslant\frac{1}{32}$. 定理得证.

[参考文献]

[1] HORMANDER L. L^2 estimates and existence theorems for the $\bar{\partial}$ operator[J]. Acta mathematica,1965,113:89-152.

[2] ADACHI K. Several complex variables and integral formulas[M]. Singapore:World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd,2007:53-99.

[3] KRANTZ S G. Function theory of several complex variables[M]. 2nd ed. Rhode Island:American Mathematical Society,2001:175-194.

[4] EVANS L C. Partial differential equations[M]. Rhode Island:American Mathematical Society,1998:23-25.

[5] DAI S Y,LIU Y,PAN Y F. A right inverse of differential operator $\Delta+a$ in weighted Hilbert space $L^2(\mathbf{R}^n,\mathrm{e}^{-|x|^2})$[J/OL]. Arxive-prints,2019:1909.12477v1.

[责任编辑:陆炳新]