doi:10.3969/j.issn.1001-4616.2020.03.005

Hopf Cotruss 的结构

严佳玲,郑慧慧,张良云

(南京农业大学理学院,江苏 南京 210095)

[**摘要**]　本文主要给出 Hopf cotruss 的概念及其等价刻画,并建立 Hopf cotruss 与 Hopf cobrace 之间的联系.

[**关键词**]　Hopf cotruss,Hopf cobrace,Hopf 代数,双代数

[**中图分类号**]O153. 3　[**文献标志码**]A　[**文章编号**]1001-4616(2020)03-0023-05

The Structure of Hopf Cotruss

Yan Jialing,Zheng Huihui,Zhang Liangyun

(College of Science,Nanjing Agricultural University,Nanjing 210095,China)

Abstract:In this paper,we mainly introduce the conception of Hopf cotruss and give its equivalent descriptions. Moreover, we establish the relation between Hopf cotruss and Hopf cobrace.

Key words:Hopf cotruss,Hopf cobrace,Hopf algebra,bialgebra

量子 Yang-Baxter 方程是数学物理研究领域的重要方程之一,一直是众多专家和学者所关注和研究的热点课题. 同时,由拟三角 Hopf 代数可以构造量子 Yang-Baxter 方程,因此,量子 Yang-Baxter 方程在 Hopf 代数的发展中也起着至关重要的作用. 寻找 Yang-Baxter 方程的解是代数学研究中的一个基本问题.

设 X 是一个集合,$r:X\times X\to X\times X$,$r(x,y)=(\lambda_x(y),\rho_y(x))$,$x,y\in X$,其中 λ_x,ρ_y 均为定义在 X 上的映射,如果映射 r 满足下列方程:

$$(r\times id)(id\times r)(r\times id)=(id\times r)(r\times id)(id\times r),$$

则称(X,r)为 Yang-Baxter 方程的集合论解[1]. 如果对于任意 $x\in X$,映射 λ_x, ρ_x 均为双射,则称集合论解(X,r)为非退化的;如果 $r^2=id_{X\times X}$,则称集合论解(X,r)为对合的.

为了探索 Yang-Baxter 方程的非退化对合的集合论解,Rump 首次在环论中引入了 brace 概念[1]. 作为 Jacobson 根环的一种推广,brace 为探索 Yang-Baxter 方程的解提供了非常有效的代数框架,它的优点在于可以类似环论讨论辫子方程.

自 brace 概念被提出之后,引起了众多专家和学者的高度关注,并迅速得到推广(见文献[2-8]). 在文献[9]中,Guarnieri 和 Vendramin 首次引入了 brace 的推广概念,即,斜 brace. 近年来,为了寻找 Yang-Baxter 方程的非退化解,Angiono 等[10]首次在 Hopf 代数上提出了 Hopf brace 概念,并指出每个 Hopf brace 可以构造辫子方程的解. 最近,文献[11]作者提出了 Hopf cobrace 概念,并给出了 Hopf cobrace、辫子方程和双交叉余积之间的关系等.

为了研究斜 brace 中两个群运算法则的起源,Brzeziński 在文献[4]中将斜 brace 进行推广,首次在 Hopf 代数上提出了 Hopf truss 概念,并给出了 Hopf truss 的等价刻画.

正是基于上述分析和考虑,本文引入了 Hopf cotruss 概念,给出了 Hopf cotruss 的性质和等价刻画,并建立了 Hopf cotruss 与 Hopf cobrace 之间的联系等.

在本文中,我们所考虑的对象均是域 k 上的向量空间. 求和记号“$\sum$”均省略,如,在余代数 C 中,使用 $\Delta(x)=x_1\otimes x_2$,$x\in C$ 表示余代数 C 的余乘法结构;在余模 M 中,使用 $\rho(m)=m_{(-1)}\otimes m_{(0)}$,$m\in M$ 表示余模

收稿日期:2020-03-29.
基金项目:国家自然科学基金项目(11571173).
通讯作者:张良云,博士,教授,研究方向:Hopf 代数. E-mail:zlyun@ njau. edu. cn

M 的余作用结构,等等.

1　预备知识

定义1　设(A,Δ,ε)是一个余代数,在A上存在二元运算$\diamondsuit$使得(A,Δ,ε)是一个Hopf代数(单位元记作$1_{\diamondsuit}$,对极映射记为S),在A上存在二元运算$\circ$使得(A,Δ,ε)是一个双代数(单位元记作$1_{\circ}$). 如果在(A,Δ,ε)上存在一个余代数自同态σ,使得对任意$a,b,c\in A$,有

$$a\circ(b\diamondsuit c)=(a_1\circ b)\diamondsuit S(\sigma(a_2))\diamondsuit(a_3\circ c),\tag{1}$$

则称A是一个左Hopf truss[4].

定义2　设$(A,m,1)$是一个代数,如果下列条件成立:

(1) $(A,m,1,\Delta,\varepsilon,S)$是一个Hopf代数.

(2) $(A,m,1,\Delta',\varepsilon,T)$是一个Hopf代数.

(3) 对任意$a\in A$,下面兼容条件满足:

$$a_{1'}\otimes a_{2'1}\otimes a_{2'2}=a_{11'}S(a_2)a_{31'}\otimes a_{12'}\otimes a_{32'},\tag{2}$$

则称$(A,m,1)$是一个Hopf cobrace[11],这里$\Delta(a)=a_1\otimes a_2$,$\Delta'(a)=a_{1'}\otimes a_{2'}$. 以下简记这个Hopf cobrace为$(A,\Delta,\Delta')$.

定义3　设H和A均是Hopf代数,假设A是一个左H-余模余代数. 如果存在一个代数同构$\pi:A\to H$,使得对任意$a\in A$,有

$$\pi(a)_1\otimes\pi(a)_2=\pi(a_1)a_{2(-1)}\otimes\pi(a_{2(0)}),\tag{3}$$

则称代数同构π是一个双射1-余循环[11].

2　主要结果

定义4　设$(A,m,1,\Delta,\varepsilon_\Delta,S)$是一个Hopf代数,$(A,m,1,\Delta',\varepsilon_{\Delta'})$是一个双代数. 如果在$(A,m,1)$上存在一个代数自同态$\sigma$,使得对任意$a\in A$,有

$$a_{1'}\otimes a_{2'1}\otimes a_{2'2}=a_{11'}\sigma(S(a_2))a_{31'}\otimes a_{12'}\otimes a_{32'},\tag{4}$$

则称A是一个(左)Hopf cotruss,记作$(A,\Delta,\Delta',\sigma)$.

注1　(1)以下称定义4中的代数映射σ为Hopf cotruss $(A,\Delta,\Delta',\sigma)$的一个余循环.

(2)在定义4中,如果$(A,m,1,\Delta',\varepsilon_{\Delta'})$是一个Hopf代数,且$\sigma=id$,则Hopf cotruss $(A,\Delta,\Delta',\sigma)$恰好是一个Hopf cobrace.

在Hopf cotruss$(A,\Delta,\Delta',\sigma)$中,余循环$\sigma$由余乘法$\Delta'$和余单位$\varepsilon_{\Delta'}$确定.

引理1　设$(A,\Delta,\Delta',\sigma)$是一个Hopf cotruss,则对任意$a\in A$,有

$$\sigma(a)=a_{1'}\varepsilon_\Delta(a_{2'}).\tag{5}$$

因此,$\varepsilon_{\Delta'}\sigma=\varepsilon_\Delta$且$\sigma$是左$(A,\Delta')$-余线性的,即$\Delta'\sigma=(id\otimes\sigma)\Delta'$.

证明　对(4)式两边同时作用$id\otimes\varepsilon_\Delta\otimes\varepsilon_\Delta$,得出

$$a_{1'}\varepsilon_{\Delta'}(a_{2'})=a_{11'}\sigma(S(a_2))a_{31'}\varepsilon_\Delta(a_{12'})\varepsilon_\Delta(a_{32'}).$$

设$\tau(a)=a_{1'}\varepsilon_\Delta(a_{2'})$,则根据上述等式可得,$\tau(a)=\tau(a_1)\sigma(S(a_2))\tau(a_3)$. 由于$(A,\Delta')$是一个双代数,所以$\tau$是$A$上的一个代数自同态,故对任意$a\in A$,有

$$\sigma(a)=\tau(a_1)\tau(S(a_4))\sigma(a_5)=\tau(a_{11})\sigma(S(a_{12}))\tau(a_{13})\tau(S(a_4))\sigma(a_5)=$$
$$\tau(a_1)\sigma(S(a_2))\tau(a_3)\tau(S(a_4))\sigma(a_5)=\tau(a_1)\sigma(S(a_2))\sigma(a_3)=\tau(a).$$

因此,(5)式得证.

由Hopf cotruss的定义,可以直接得出以下性质.

引理2　设$(A,\Delta,\Delta',\sigma)$是一个Hopf cotruss,则对任意$a\in A$,有

$$a_{1'}\otimes S(a_{2'1})\otimes a_{2'2}=\sigma(a_1)S(a_2)_{1'}a_{31'}\otimes S(a_2)_{2'}\otimes a_{32'},\tag{6}$$

$$a_{1'}\otimes a_{2'1}\otimes S(a_{2'2})=a_{11'}S(a_2)_{1'}\sigma(a_3)\otimes a_{12'}\otimes S(a_2)_{2'}.\tag{7}$$

证明　对于任意$a\in A$,可证

$$\sigma(a_1)S(a_2)_{1'}a_{31'}\otimes S(a_2)_{2'}\otimes a_{32'}=$$
$$\sigma(a_1)S(a_2)_{1'}a_{31'}\otimes S(a_2)_{2'}a_{32'1}S(a_{32'2})\otimes a_{32'3}=$$
$$\sigma(a_1)(S(a_2)a_3)_{1'}\sigma(S(a_4))a_{51'}\otimes(S(a_2)a_3)_{2'}S(a_{52'1})\otimes a_{52'2}=$$
$$\sigma(a_1)\sigma(S(a_2))a_{31'}\otimes S(a_{32'1})\otimes a_{32'2}=$$
$$\sigma(a_1S(a_2))a_{31'}\sigma(S(a_4))a_{51'}\otimes S(a_{32'})\otimes a_{52'}=$$
$$a_{11'}\sigma(S(a_2))a_{31'}\otimes S(a_{12'})\otimes a_{32'}=$$
$$a_{1'}\otimes S(a_{2'1})\otimes a_{2'2},$$
$$a_{11'}S(a_2)_{1'}\sigma(a_3)\otimes a_{12'}\otimes S(a_2)_{2'}=a_{11'}S(a_2)_{1'}a_{31'}\varepsilon_\Delta(a_{32'})\otimes a_{12'}\otimes S(a_2)_{2'}=$$
$$a_{11'}S(a_2)_{1'}a_{31'}\otimes a_{12'}\otimes S(a_2)_{2'}a_{32'1}S(a_{32'2})=$$
$$a_{11'}(S(a_2)a_3)_{1'}\sigma(S(a_4))a_{51'}\otimes a_{12'}\otimes(S(a_2)a_3)_{2'}S(a_{52'})=$$
$$a_{11'}\sigma(S(a_2))a_{31'}\otimes a_{12'}\otimes S(a_{32'})=a_{1'}\otimes a_{2'1}\otimes S(a_{2'2}).$$

由引理 1 与引理 2,可以证明 Hopf cotruss 具有下列的等价刻画.

定理 1 设$(A,m,1)$是一个代数,分别使得$(A,m,1,\Delta,\varepsilon_\Delta,S)$是一个 Hopf 代数,$(A,m,1,\Delta',\varepsilon_{\Delta'})$是一个双代数,则下列等价.

(1)存在一个代数自同态 $\sigma:A\to A$,使得$(A,\Delta,\Delta',\sigma)$是一个 Hopf cotruss.

(2)存在一个线性同态 $\lambda:A\to A\otimes A,\lambda(a)=a^1\otimes a^2$,使得对任意 $a\in A$,有

$$a_{1'}\otimes a_{2'1}\otimes a_{2'2}=a_{11'}(a_2)^1\otimes a_{12'}\otimes(a_2)^2. \tag{8}$$

(3)存在一个线性同态 $\mu:A\to A\otimes A,\mu(a)=a^{1'}\otimes a^{2'}$,使得对任意 $a\in A$,有

$$a_{1'}\otimes a_{2'1}\otimes a_{2'2}=(a_1)^{1'}a_{21'}\otimes(a_1)^{2'}a_{22'}. \tag{9}$$

(4)存在两个线性同态 $\xi,\zeta:A\to A\otimes A,\xi(a)=a^\alpha\otimes a^\beta,\zeta(a)=a^{\alpha'}\otimes a^{\beta'}$,其中 ξ,ζ 至少有一个是代数映射,使得对任意 $a\in A$,有

$$a_{1'}\otimes a_{2'1}\otimes a_{2'2}=(a_1)^\alpha(a_2)^{\alpha'}\otimes(a_1)^\beta\otimes(a_2)^{\beta'}. \tag{10}$$

(5)定义一个线性映射 $\theta:A\to A\otimes A\otimes A,\theta(a)=a_1\otimes S(a_2)\otimes a_3$,则对任意 $a\in A$,有

$$a_{1'}\otimes\theta(a_{2'})=a_{11'}S(a_2)_{1'}a_{31'}\otimes a_{12'}\otimes S(a_2)_{2'}\otimes a_{32'}. \tag{11}$$

证明 (1)⇒(2),(3)及(4):设$(A,\Delta,\Delta',\sigma)$是一个 Hopf cotruss,定义

$$\lambda(a)=\sigma(S(a_1))a_{21'}\otimes a_{22'},$$
$$\mu(a)=a_{11'}\sigma(S(a_2))\otimes a_{12'},$$
$$\xi(a)=\Delta'(a),$$
$$\zeta(a)=\sigma(S(a_1))a_{21'}\otimes a_{22'},$$

对任意 $a\in A$,则根据 Δ 的余结合性,可由(4)式推出(8),(9)及(10). 此外,由于余乘法 Δ'是一个代数映射,所以 ξ 也是一个代数映射.

(2)⇒(1):定义一个代数自同态 $\sigma:A\otimes A,\sigma(a)=a_{1'}\varepsilon_\Delta(a_{2'})$. 显然,$\sigma$ 是一个代数映射. 下面证明等式(4)成立.

将 $id\otimes\varepsilon_\Delta\otimes id$ 作用在等式(8)上,可得

$$a_{1'}\otimes a_{2'}=\sigma(a_1)(a_2)^1\otimes(a_2)^2. \tag{12}$$

于是

$$a_{1'}\otimes a_{2'1}\otimes a_{2'2}=a_{11'}(a_2)^1\otimes a_{12'}\otimes(a_2)^2=a_{11'}\sigma(S(a_2)a_3)(a_4)^1\otimes a_{12'}\otimes(a_4)^2=$$
$$a_{11'}\sigma(S(a_2))\sigma(a_3)(a_4)^1\otimes a_{12'}\otimes(a_4)^2=a_{11'}\sigma(S(a_2))a_{31'}\otimes a_{12'}\otimes a_{32'},$$

因此,$(A,\Delta,\Delta',\sigma)$是一个 Hopf cotruss.

(3)⇒(1):同理可证.

(4)⇒(2)或(3):假设 ζ 是一个代数映射,定义 $\tau:A\otimes A,\tau(a)=a^{\alpha'}\varepsilon_\Delta(a^{\beta'})$. 易证:$\tau$ 是一个代数映射. 将 $id\otimes id\otimes\varepsilon_\Delta$ 作用在等式(10)上,可得

$$a_{1'}\otimes a_{2'}=(a_1)^\alpha\tau(a_2)\otimes(a_1)^\beta. \tag{13}$$

于是

$$a_{1'}\otimes a_{2'1}\otimes a_{2'2}=(a_1)^{\alpha}(a_2)^{\alpha'}\otimes(a_1)^{\beta}\otimes(a_2)^{\beta'}=$$
$$(a_1)^{\alpha}\tau(a_2S(a_3))(a_4)^{\alpha'}\otimes(a_1)^{\beta}\otimes(a_4)^{\beta'}(A,\rho_1)=$$
$$a_{11'}\tau(S(a_2))(a_3)^{\alpha'}\otimes a_{12'}\otimes(a_3)^{\beta'}.$$

根据上面的讨论,存在一个线性映射 $\lambda:A\otimes A\otimes A,\lambda(a)=\tau(S(a_1))(a_2)^{\alpha'}\otimes(a_2)^{\beta'}$,使得(8)式成立.

假设 ξ 是一个代数映射,易证:映射 τ(定义为 $\tau(a)=a^{\alpha}\varepsilon_{\Delta}(a^{\beta})$)是 A 上的一个代数自同态. 故类似上述方法可证:式(9)成立.

(1)⇒(5):定义映射 $\theta:A\to A\otimes A\otimes A,\theta(a)=a_1\otimes S(a_2)\otimes a_3$,则对任意 $a\in A$,有

$$a_{1'}\otimes\theta(a_{2'})=a_{1'}\otimes a_{2'1}\otimes S(a_{2'2})\otimes a_{2'3}=$$
$$a_{11'}\sigma(S(a_2))a_{31'}\otimes a_{12'}\otimes S(a_{32'1})\otimes a_{32'2}=$$
$$a_{11'}\sigma(S(a_2))\sigma(a_3)S(a_4)_{1'}a_{51'}\otimes a_{12'}\otimes S(a_4)_{2'}\otimes a_{52'}=$$
$$a_{11'}\sigma(S(a_2)a_3)S(a_4)_{1'}a_{51'}\otimes a_{12'}\otimes S(a_4)_{2'}\otimes a_{52'}=$$
$$a_{11'}S(a_2)_{1'}a_{31'}\otimes a_{12'}\otimes S(a_2)_{2'}\otimes a_{32'}.$$

(5)⇒(1):定义一个线性自同态 $\sigma:A\to A,\sigma(a)=a_{1'}\varepsilon_{\Delta}(a_{2'})$. 显然,$\sigma$ 是一个代数映射. 将 $id\otimes id\otimes\varepsilon_{\Delta}\otimes id$ 作用在等式(11)上,可得(4)式.

命题 1　设$(A,\Delta,\Delta',\sigma)$是一个 Hopf cotruss,则 A 具有如下两个左$(A,\Delta',\varepsilon_{\Delta'})$-余模余代数:

$$\rho_1:A\to A\otimes A,\rho_1(a)=\sigma(S(a_1))a_{21'}\otimes a_{22'},\tag{14}$$
$$\rho_2:A\to A\otimes A,\rho_2(a)=a_{11'}\sigma(S(a_2))\otimes a_{12'}.\tag{15}$$

证明　只需证明(A,ρ_1)是一个左$(A,\Delta',\varepsilon_{\Delta'})$-余模余代数. 同理可证:$(A,\rho_2)$也是一个左$(A,\Delta',\varepsilon_{\Delta'})$-余模余代数. 事实上,对任意 $a\in A$,由引理 1 与引理 2,可得

$$a_{(-1)}\otimes a_{(0)(-1)}\otimes a_{(0)(0)}=\sigma(S(a_1))a_{21'}\otimes\sigma(S(a_{22'1}))a_{22'21'}\otimes a_{22'22'}=$$
$$\sigma(S(a_1))\sigma(a_2)S(a_3)_{1'}a_{41'}\otimes\sigma(S(a_3)_{2'})a_{42'}\otimes a_{43'}=$$
$$S(a_1)_{1'}a_{21'}\otimes\sigma(S(a_1)_{2'})a_{22'}\otimes a_{23'}=$$
$$\sigma(S(a_1))_{1'}a_{21'}\otimes\sigma(S(a_1))_{2'}a_{22'}\otimes a_{23'}=\Delta'(a_{(-1)})\otimes a_{(0)},$$
$$\varepsilon_{\Delta'}(a_{(-1)})a_{(0)}=\varepsilon_{\Delta'}(\sigma(S(a_1))a_{21'})a_{22'}=\varepsilon_{\Delta'}\sigma(S(a_1))a_2=\varepsilon_{\Delta}(a_1)a_2=a,$$

因此,(A,ρ_1)是一个左$(A,\Delta',\varepsilon_{\Delta'})$-余模. 另外

$$a_{(-1)}\otimes\Delta(a_{(0)})=\sigma(S(a_1))a_{21'}\otimes a_{22'1}\otimes a_{22'2}=$$
$$\sigma(S(a_1))a_{21'}\sigma(S(a_3))a_{41'}\otimes a_{22'}\otimes a_{42'}=$$
$$\sigma(S(a_1))a_{21'}\varepsilon_{\Delta}(a_{22'})=\sigma(S(a_1))\sigma(a_2)=\varepsilon_{\Delta}(a)1_A,$$

因此,(A,ρ_1)是一个左$(A,\Delta',\varepsilon_{\Delta'})$-余模余代数.

由如下命题知,一个 Hopf cotruss 可以产生一族 Hopf cotruss.

命题 2　设$(A,\Delta,\Delta',\sigma)$是一个 Hopf cotruss. 在 A 上定义一个新的余乘法 Δ_n:对任意 $n\in\mathbf{N}$,

$$\Delta_n(a)\equiv a_{1_n}\otimes a_{2_n}=a_1\varepsilon_{\Delta}(\sigma^n(S(a_2)))\otimes a_3,$$

则$(A,\Delta_n,\varepsilon_{\Delta_n}\equiv\varepsilon_{\Delta}\sigma^n)$是一个 Hopf 代数,对极映射为

$$S_n(a)\equiv\varepsilon_{\Delta}(\sigma^n(a_1))S(a_2)\varepsilon_{\Delta}(\sigma^n(a_3)).$$

另外,$(A,\Delta_n,\Delta',\sigma^{n+1})$是一个 Hopf cotruss.

证明　因为 σ 是一个代数映射,(A,m,Δ)是一个 Hopf 代数,易证:$(A,m,\Delta_n,\varepsilon_{\Delta_n},S_n)$是一个 Hopf 代数.

运用数学归纳法,由(5)式:$\sigma(a)=a_{1'}\varepsilon_{\Delta}(a_{2'}),a\in A$,可以证明 $\sigma^{n+1}(a)=a_{1'}\varepsilon_{\Delta}\sigma^n(a_{2'})$.

下面,证明$(A,\Delta_n,\Delta',\sigma^{n+1})$是一个 Hopf cotruss. 事实上,显然,σ^{n+1}是一个代数映射,又对任意 $a\in A$,

$$a_{1'}\otimes a_{2'1_n}\otimes a_{2'2_n}=a_{1'}\otimes a_{2'1}\varepsilon_{\Delta}(\sigma^n(S(a_{2'2})))\otimes a_{2'3}=$$
$$a_{11'}\sigma(S(a_2))a_{31'}\otimes a_{12'}\varepsilon_{\Delta}(\sigma^n(S(a_{32'1})))\otimes a_{32'2}=$$
$$a_{11'}\sigma(S(a_2))\sigma(a_3)S(a_4)_{1'}a_{51'}\otimes a_{12'}\varepsilon_{\Delta}(\sigma^n(S(a_4)_{2'}))\otimes a_{52'}=$$
$$a_{11'}\sigma(S(a_2))\sigma(a_3)\sigma^{n+1}(S(a_4))a_{51'}\otimes a_{12'}\otimes a_{52'}=a_{11'}\sigma^{n+1}(S(a_2))a_{31'}\otimes a_{12'}\otimes a_{32'},$$
$$a_{1_n1'}\sigma^{n+1}(S_n(a_{2_n}))a_{3_n1'}\otimes a_{1_n2'}\otimes a_{3_n2''}=$$

$$a_{11'}\varepsilon_\Delta(\sigma^n(S(a_2)))\sigma^{n+1}(S_n(a_3))\varepsilon_\Delta(\sigma^n(S(a_4)))a_{51'}\otimes a_{12'}\otimes a_{52'}=$$
$$a_{11'}\varepsilon_\Delta(\sigma^n(S(a_2)))\sigma^{n+1}(S(a_4))\varepsilon_\Delta(\sigma^n(a_3))\varepsilon_\Delta(\sigma^n(a_5))\varepsilon_\Delta(\sigma^n(S(a_6)))a_{71'}\otimes a_{12'}\otimes a_{72'}=$$
$$a_{11'}\sigma^{n+1}(S(a_2))a_{31'}\otimes a_{12'}\otimes a_{32'},$$
因此,对任意 $a\in A$,
$$a_{1'}\otimes a_{2'1_n}\otimes a_{2'2_n}=a_{1_n1'}\sigma^{n+1}(S_n(a_{2_n}))a_{3_n1'}\otimes a_{1_n2'}\otimes a_{3_n2'}.$$
故$(A,\Delta_n,\Delta',\sigma^{n+1})$是一个 Hopf cotruss.

下面建立 Hopf cotruss 和 Hopf cobrace 之间的联系.

设$(A,\Delta,\Delta',\sigma)$是一个 Hopf cotruss. 若$(A,m,1,\Delta',\varepsilon_{\Delta'},T)$是一个 Hopf 代数,则 σ 是一个双射,其逆为
$$\sigma^{-1}(a)=a_{1'}\varepsilon_\Delta(T(a_{2'})),a\in A.$$
命题 3 设$(A,\Delta,\Delta',\sigma)$是一个 Hopf cotruss. 如果$(A,m,1,\Delta',\varepsilon_{\Delta'},T)$是一个 Hopf 代数,其对极映射为 T,则(A,Δ',Δ'')是一个 Hopf cobrace.

这里 Δ''定义为:对任意 $a\in A$,
$$\Delta''(a)\equiv\sigma^{-1}(a_{1'})\otimes a_{2'}=a_{1'}\varepsilon_\Delta(T(a_{2'}))\otimes a_{3'}.$$
证明 由引理 1,命题 1,可证
$$\sigma(a_1)a_{2(-1)}\otimes\sigma(a_{2(0)})=\sigma(a_1)\sigma(S(a_2))a_{31'}\otimes\sigma(a_{32'})=a_{1'}\otimes\sigma(a)_{2'}=\sigma(a)_{1'}\otimes\sigma(a)_{2'},$$
因此,由上面的讨论以及定义 3 知,σ 是一个双射 1-余循环.

又由于 σ 是左(A,Δ')-余线性的,所以
$$\sigma^{-1}(\sigma(a)_{1'})\otimes\sigma^{-1}(\sigma(a)_{2'})=\sigma^{-1}(a_{1'})\otimes a_{2'}=a_{1'}\varepsilon_\Delta(T(a_{2'}))\otimes a_{3'}=\Delta''(a),$$
故由文献[11]中的定理 2.12 的证明知,(A,Δ,Δ'')是一个 Hopf cobrace.

[参考文献]

[1] RUMP W. Braces,radical rings,and the quantum Yang-Baxter equation[J]. Journal of algebra,2007,307:153-170.

[2] CEDÓ F,JESPERS E,OKNIЙSKI J. Braces and the Yang-Baxter equation[J]. Communications in mathematical physics, 2014,327:101-116.

[3] BACHILLER D. Extensions,matched products,and simple braces[J]. Journal of pure and applied algebra,2017,222:1670-1691.

[4] BRZEZIńSKI T. Trusses:between braces and rings[J]. Transactions of the American mathematical society,2019,372(6): 4149-4176.

[5] KONOVALOV A,SMOKTUNOWICZ A,VENDRAMIN L. On skew braces and their ideals[J]. Experimental mathematics, 2018. Doi:10.1080/10586458.2018.1492476.

[6] KATSAMAKTSIS K. New solutions to the reflection equation with braces[J]. arXiv:1905.12711v3.

[7] NASYBULLOV T. Connections between properties of the additive and the multiplicative groups of a two-sided skew brace[J]. Journal of algebra,2019,540:156-167.

[8] CATINO F,COLAZZO I,STEFANELLI P. Semi-braces and the Yang-Baxter equation[J]. Journal of algebra,2017,483: 163-187.

[9] GUARNIERI L,VENDRAMIN L. Skew braces and the Yang-Baxter equation[J]. Mathematics of computation,2017,86:2519-2534.

[10] ANGIONO I,GALINDO C,VENDRAMIN L. Hopf braces and Yang-Baxter operators[J]. Proceedings of the American mathematical society,2016,145:1981-1995.

[11] ZHENG H H,LI F S,MA T S,et al. Hopf braces,braid equations and bicrossed coproducts[J]. arXiv:1912.01392v1.

[责任编辑:陆炳新]