doi:10.3969/j.issn.1001-4616.2020.04.002

亚纯函数正规族的一点注记

胡雅倩,徐 焱

(南京师范大学数学科学学院,江苏 南京 210023)

[摘要] 本文研究了亚纯函数正规定则,得到下面结果. 设 $k\geqslant 4$ 是正整数,$\mathcal{F}$ 为区域 D 内的一族亚纯函数,$\forall f\in\mathcal{F}$,$a(z)(\neq 0,\neq\infty)$是 D 内亚纯函数,且满足当 $a(z)=0$ 时,$f(z)\neq\infty$;当 $a(z)=\infty$ 时,$f(z)\neq 0$. 若

$$f'(z)-a(z)f^k(z)\neq 0,$$

则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

[关键词] Hayman 猜测,亚纯函数,正规族

[中图分类号]O174.52 [文献标志码]A [文章编号]1001-4616(2020)04-0006-03

A Note on the Normal Family of Meromorphic Functions

Hu Yaqian,Xu Yan

(School of Mathematical Sciences,Nanjing Normal University,Nanjing 210023,China)

Abstract:In this paper,we discuss the normality concerning omitted meromorphic function and get the following results. Let $\mathcal{F}$ be a family of meromorphic functions on a domain D,$k\geqslant 4$ be a positive integer,and let $a(z)(\neq 0,\neq\infty)$ be a meromorphic function on D which satisfies $f(z)\neq\infty$ whenever $a(z)=0$ and satisfies $f(z)\neq 0$ whenever $a(z)=\infty$. If for any $f\in\mathcal{F}$,

$$f'(z)-a(z)f^k(z)\neq 0,$$

then $\mathcal{F}$ is normal on D.

Key words:Hayman's conjecture,meromorphic function,normal family

1 引言及主要结果

设 D 是复平面 $\mathbb{C}$ 上的一个区域,$\mathcal{F}$ 为 D 内的一族亚纯函数,如果 $\mathcal{F}$ 中每个函数序列都包含一个子序列,它在 D 的任一紧子集上都按球面距离一致收敛到一个亚纯函数或∞,则称 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

1959 年,Hayman[1]得到

定理 *A* 设 $f(z)$ 是 $\mathbb{C}$ 上亚纯函数,$k\geqslant 5$, $a(\neq 0)$、b 为有限复数,若

$$f'(z)-af^k(z)\neq b,$$

则 f 是常数.

Mues 举例说明当 $k=3,4$ 时定理 A 不成立. 根据 Bloch 原理,Hayman 猜测相应的正规定则可能也是正确的. 1985 年,李先进[2]证明了

定理 *B* 设 $\mathcal{F}$ 为区域 D 内的一族亚纯函数,$k\geqslant 5$,$a(\neq 0)$、b 为有限复数,若对 $\forall f\in\mathcal{F}$,有

$$f'(z)-af^k(z)\neq b$$

则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

庞学诚[3]证明了当 $k=4$ 时,定理 B 也成立. 进一步,陈怀惠等[4]证明了当 $k=3$ 时,定理 B 依然成立. 当 $k=2$ 时,有例子 $\mathcal{F}=\left\{\dfrac{1}{nz}:n=1,2,\cdots\right\}$说明定理 B 不成立.

收稿日期:2019-12-30.

基金项目:国家自然科学基金项目(11471163).

通讯作者:胡雅倩,硕士研究生,研究方向:复分析. E-mail:1255663084@qq.com

最近杨锦华等[5]将上述正规定则中的常数 $a(\neq 0)$ 换成全纯函数 $a(z)(\neq 0)$,得到了

定理 C 设 $k\geq 4$ 是正整数,$\mathcal{F}$ 为区域 D 内的一族亚纯函数,$a(z)(\neq 0)$ 和 $b(z)$ 为区域 D 内两个全纯函数. 当 $a(z)=0$ 时, $f(z)\neq\infty$. 对 $\forall f\in\mathcal{F}$,若

$$f'(z)-a(z)f^k(z)\neq b(z),$$

则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

自然地,想知道定理 C 中 $a(z)$ 换成亚纯函数结论是否成立呢? 本文得到了下面的结果.

定理 1 设 $k\geqslant 3$ 是正整数,$\mathcal{F}$ 为区域 D 内的一族亚纯函数,$a(z)(\not\equiv\infty)$ 是 D 内没有零点的亚纯函数,且当 $a(z)=\infty$ 时, $f(z)\neq 0$. 对 $\forall f\in\mathcal{F}$,若

$$f'(z)-a(z)f^k(z)\neq 0,$$

则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

注 下面的例子说明定理 1 中条件当“$a(z)=\infty$ 时, $f(z)\neq 0$”是必须的.

例 1 设 $D=\{z:|z|<1\}$, $a(z)=\dfrac{1}{z^k}$, $k\geq 3$.

$$\mathcal{F}=\{f_n(z):f_n(z)=nz\},n\geq 2.$$

则 $f_n'(z)-a(z)f_n^k(z)=n-\dfrac{1}{z^k}n^kz^k=n-n^k\neq 0$ 而 $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right)=1$, $f_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)=\dfrac{n}{\sqrt{n}}=\sqrt{n}\to\infty\ (n\to\infty)$. 故 $\mathcal{F}$ 在 $z=0$ 处不等度连续,从而 $\mathcal{F}$ 在 $z=0$ 处不正规.

若 $\mathcal{F}$ 中零点、极点均为重级,则定理 1 中条件“$k\geqslant 3$”可减弱为“$k\geqslant 2$”.

定理 2 设 $k\geq 2$ 是正整数,$\mathcal{F}$ 为区域 D 内的一族亚纯函数,族中函数零点极点均为重级, $\forall f\in\mathcal{F}$, $a(z)(\not\equiv\infty)$ 是 D 内没有零点的亚纯函数且满足当 $a(z)=\infty$ 时, $f(z)\neq 0$. 若

$$f'(z)-a(z)f^k(z)\neq 0,$$

则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

因为函数族的正规性是局部性质,结合定理 1 和定理 C 可得:

定理 3 设 $k\geqslant 4$ 是正整数,$\mathcal{F}$ 为区域 D 内的一族亚纯函数, $\forall f\in\mathcal{F}$,$a(z)(\not\equiv 0,\not\equiv\infty)$ 是 D 内亚纯函数且满足当 $a(z)=0$ 时, $f(z)\neq\infty$;当 $a(z)=\infty$ 时, $f(z)\neq 0$. 若

$$f'(z)-a(z)f^k(z)\neq 0,$$

则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

2 定理的证明

为了证明本文的结果,需要下列引理

引理 1[6,7] 设 $\varphi(\not\equiv 0)$ 是 D 内亚纯函数,k 为正整数,$\mathcal{F}$ 是 D 内亚纯函数族,对 $\forall f\in\mathcal{F}$, f 零点重数至少为 $k+1$,极点重数至少为 2,若 $f^{(k)}(z)\neq\varphi(z)$,则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

定理 1 的证明 由 $f'(z)-a(z)f^k(z)\neq 0$, 及当 $a(z)=\infty$ 时, $f(z)\neq 0$,可以断言:

$$\frac{f'(z)}{f^k(z)}-a(z)\neq 0(z\in D). \tag{1}$$

(1)事实上,对 $z_0\in D$,当 $f(z_0)\neq 0,\infty$ 时,显然有 $\dfrac{f'(z)}{f^k(z)}-a(z)\neq 0$.

(2)当 $f(z_0)=0$ 时,$a(z)\neq\infty$. 由 $f'(z)-a(z)f^k(z)\neq 0$ 知, $f'(z_0)\neq 0$, 从而 z_0 是 $\dfrac{f'(z)}{f^k(z)}$ 的极点,所以 $\dfrac{f'(z_0)}{f^k(z_0)}-a(z_0)\neq 0$.

(3)当 $f(z_0)=\infty$ 时,设 z_0 为 f 的 l 重极点,从而 z_0 为 f' 的 $l+1$ 重极点. z_0 为 f^k 的 kl 重极点,又 $kl-(l+1)=(k-1)l-1\geqslant 2l-1>0$,所以 z_0 是 $\dfrac{f'(z)}{f^k(z)}$ 的零点,注意到 $a(z)\neq 0$,从而 $\dfrac{f'(z_0)}{f^k(z_0)}-a(z_0)\neq 0$. 再当 $a(z)=\infty$ 时,

$f(z)\neq 0$,由(1)可得

$$\frac{f'(z)}{f^k(z)}\neq a(z). \tag{2}$$

令

$$\mathcal{G}=\left\{g(z)=\frac{1}{f^{k-1}}: f\in\mathcal{F}\right\},$$

$\forall g\in\mathcal{G}$, $g'(z)=(1-k)\dfrac{f'(z)}{f^k(z)}\neq(1-k)a(z)$. 又因为 $k-1\geqslant 2$,所以 g 的极点重级至少为 2,零点重级至少为 2. 根据引理 1 可知,$\mathcal{G}$ 在 D 内正规,从而 $\mathcal{F}_1=\{f^{k-1}\mid f\in\mathcal{F}\}$ 在 D 内正规,故 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

定理 2 的证明　类似定理 1 的证明,可得 $\forall g\in G, g'(z)=(1-k)\dfrac{f'(z)}{f^k(z)}\neq(1-k)a(z)$. 由 $\mathcal{F}$ 中函数零点、极点均为重级知,g 的零点、极点也均为重级. 应用引理 1,同上可得 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

[参考文献]

[1] HAYMAN W K. Picard values of meromorphic functions and their derivatives[J]. Annals of mathematics(second series), 1959,70(1):9-42.

[2] LI X J. Proof of Hayman's conjecture on normal families[J]. Science in China,1985(6):38-45.

[3] PANG X C. On normal criterion of meromorphic functions[J]. Science in China,1990(5):11-17.

[4] CHEN H H,FANG M L. The value distribution of $f^n f'$[J]. Science in China,1995,38(7):23-32.

[5] YANG J H,YANG Q,PANG X C. A normal criterion concerning omitted holomorphic function[J]. Acta mathematics sinica, 2019,35(12):1972-1978.

[6] XU Y. Normal families and exceptional functions[J]. Journal of mathematical analysis and applications,2007,329(2):1343-1354.

[7] PANG X C,ZALCMAN L. Normal families of meromorphic functions with multiple zeros and poles[J]. Israel journal of mathematics,2003,136(1):1-9.

[责任编辑:陆炳新]