doi:10.3969/j.issn.1001-4616.2021.03.002

带有不定线性部分的薛定谔方程的多解存在性

洪明理[1],李林锐[1],黄代文[2]

(1.防灾科技学院,三河 065201)
(2.北京应用物理与计算数学研究所,北京 100088)

[摘要]　本文研究如下薛定谔方程:$-\Delta u=V(|x|)u+f(|x|,u)$,$x\in R^N$,$u\in H^1(R^N)$. 在 V 和 f 满足一定的假设下,我们得到了该方程的无穷多个径向解的存在性.

[关键词]　薛定谔方程,不定线性部分,径向解
[中图分类号]O177　[文献标志码]A　[文章编号]1001-4616(2021)03-0009-05

Multiple Solutions of a Schrödinger Equation with Indefinite Nonlinearity

Hong Mingli[1],Li Linrui[1],Huang Daiwen[2]

(1.Institute of Disaster Prevention,Sanhe 065201,China)
(2.Institute of Applied Physics and Computational Mathematics,Beijing 100088,China)

Abstract:In this paper,we consider the following Schrödinger equation:$-\Delta u=V(|x|)u+f(|x|,u)$,$x\in R^N$,$u\in H^1(R^N)$. Under some assumptions of V and f,we obtain infinitely many radial solutions of the above equation.

Key words:Schrödinger equation,indefinite nonlinearity,radial solutions

许多的文章研究如下薛定谔方程解的存在性和多解性:

$$-\Delta u=V(|x|)u+f(|x|,u),x\in R^N,u\in H^1(R^N). \tag{1}$$

上述问题是由物理和数学物理中的问题抽象出来的,参见文[1]及其它的参考文献.

许多的文章考虑(1)的径向解的存在性,参见文[2-3]. 在文[2-3]中他们获得了下面自治的(1)的无穷多个球对称解的存在性:$-\Delta u=f(u)$. 近年来,有许多的文章考虑关于不定的非线性和不定的线性的椭圆问题.文[4-5]考虑了椭圆问题$-\Delta u=\lambda u+h(x)f(u)$在 Ω 中的非平凡解的存在性,其中 Ω 是 R^N 中的有界区域,h 是变号的. 一般情况下,$h(x)f(u)$称为不定的非线性部分. 在文[6]中,作者研究了椭圆方程$-\Delta u=\lambda V(x)u+f(x,u)$在 Ω 中非平凡解的存在性,其中 Ω 是 R^N 中的无界区域,V 是变号的,V 称为不定的线性部分. 在这篇文章中,为了得到上述方程的非平凡解的存在性,作者给出了 λ 和 Ω 的一些假设. 文[7]得到了上述方程在 $\Omega=R^N$ 中多解的存在性,其中$f(x,u)=|u|^{p-2}u$,V 和 λ 满足一些假设. 特别地,在文[8]中,Costa 和 Tehrani 得到了在一定的条件下一类 R^N 中的不定椭圆问题:$-\Delta u=\lambda h(x)u+a(x)g(u)$的一个或两个正解的存在性.

这里我们寻找问题(1)的无穷多个径向解的存在性,其中 V 在 R^N 中可能变号,$f(|x|,u)$关于 u 是奇的. 我们的方法受到了文[1]的启发. 考虑问题(1)的困难之一是不具有紧性,即嵌入 $H^1(R^N)\to L^p(R^N)$ $\left(2<p<2^*=\dfrac{2N}{N-2}\right)$不具有紧性,因为 R^N 是无界区域. 在文[1]中 Bartsh 和 Willem 巧妙地选择了空间 $H^1(R^N)$的子空间 X,使得嵌入 $X\to L^p(R^N)$是紧的.利用 Fountain 定理([9],定理 3.6)和对称临界点原理(参见文[10]),他们得到了(1)的无穷多个径向和非径向解的存在性. $V(x)$在文[1]中有一个负的上界.但是在我们的文中,$V(x)$在 R^N 中可能变号,这是考虑问题(1)的另一个困难. 因此,证明$(PS)c$ 条件比文[1]更难. 同时,我们对 $V(x)$的分解与文[1]不同.

收稿日期:2021-04-26.
基金项目:廊坊市科技支撑计划项目(2021011043)、国家自然科学基金面上项目(12071192).
通讯作者:洪明理,硕士,副教授,研究方向:非线性分析. E-mail:hongmingli001@163.com

我们的基本假设如下:

(A1)　$V(|x|)=V^+(|x|)-V^-(|x|)$, $V^{\pm}=\max\{\pm V(|x|),0\}$, $V^+(|\cdot|)\in L^{N/2}(R^N)\cap L^{\gamma}(R^N)\left(\gamma>\dfrac{N}{2}\right)$, $\text{meas}\{x\in R^N:V^+(|x|)>0\}\neq 0$, $V^-(|\cdot|)\in L^{\infty}(R^N)$, $\lim\limits_{|x|\to\infty}V^-(|x|)=a>0$.

(A2)　$f\in \boldsymbol{C}(R^N\times R)$ 和对 $2<p<2^*$, $2<q<2^*$, $t>0$, $\forall r>0$, $|f(r,u)|\leqslant t(|u|+|u|^{p-1})$, $\lim\limits_{|u|\to\infty}\dfrac{f(r,u)}{|u|^{q-1}}=1$.

(A3)　存在 $\alpha>2$,使得对任意的 $r\geqslant 0$ 和 $u\in\mathbf{R}$, $\alpha F(r,u):=\alpha\int_0^u f(r,s)\mathrm{d}s\leqslant uf(r,u)$.

(A4)　$f(|x|,u)=o(|u|)$, $|u|\to 0$ 一致地在 R^N 中.

(A5)　f 关于 u 是奇的, $f(r,-u)=-f(r,u)$,对任意的 $r\geqslant 0$, $u\in\mathbf{R}$.

(A6)　存在 $R>0$,使得 $\inf\limits_{x\in R^N,|u|\geqslant R}F(|x|,u)>0$.

我们的结果如下:

定理 1　在(A1)~(A6)的假设下,问题(1)有一个无界的解序列 $\pm u_k$, $k\in N$, $\pm u_k$ 是径向对称的.

本文安排如下:在第一部分,我们将给出一些预备知识. 在第二部分,我们将证明 $(PS)c$ 条件. 在第三部分,我们将用 Fountain 定理和对称的临界点原理证明定理 1.

记号　$|\cdot|_p$ 是 $L^p(R^N)$ 的通常范数. $D(R^N):=\{u\in C^{\infty}(R^N)|\text{supp }u$ 是 R^N 的紧子集$\}$.

$H^1(R^N)$ 是空间 $D(R^N)$ 在范数 $\|u\|:=\left(\int_{R^N}(|\nabla u|^2+|u|^2)\mathrm{d}x\right)^{1/2}$ 下的完备化. $D^{1,2}(R^N)$ 是空间 $D(R^N)$ 在范数 $\|u\|:=\left(\int_{R^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}$ 下的完备化. $\rightharpoonup(\rightarrow)$ 代表弱收敛(强收敛). $O(N)$ 是 R^N 中的正交变换群.

$$H^1_{O(N)}(R^N):=\{u\in H^1(R^N):g(u(x))=u(g^{-1}x)=u(x),g\in O(N)\}.$$

$$B_R:=\{x:x\in R^N,|x|<R\}.\ B_R^c:=\{x:x\in R^N,|x|\geqslant R\}.$$

H 是 $H^1(R^N)$ 空间带有范数 $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_1$ 将在引理 1 中给出. $X=H_{O(N)}:=\{u:u\in H,gu=u,\forall g\in O(N)\}$.

1　预备知识

下面我们将给出关于空间 $H^1(R^N)$ 的 3 个引理.

引理 1　如果假设 (A_1) 成立,则

(1)内积 $\langle u,v\rangle_1:=\int_{R^N}(\nabla u\nabla v+V^-uv)\mathrm{d}x$ 有定义. 因此,由内积导出的范数 $\|u\|_1:=\sqrt{\langle u,u\rangle_1}$ 有定义.

(2)范数 $\|\cdot\|_1$ 等价于范数 $\|u\|=\left(\int_{R^N}(|\nabla u|^2+u^2)\mathrm{d}x\right)^{1/2}$.

证明　(1)只须证明:对任意 $u\in D(R^N)$, $\langle u,u\rangle_1\geqslant 0$,如果 $\langle u,u\rangle_1=0$,则 $u=0$. 事实上,由 V^- 的定义,我们有 $\langle u,u\rangle_1:=\int_{R^N}(|\nabla u|^2+V^-u^2)\mathrm{d}x\geqslant\int_{R^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\geqslant 0$,若 $\langle u,u\rangle_1=0$,则 $u=0$.

(2)由 V^- 的定义,存在 $R>0$,使得 $0<\dfrac{a}{2}\leqslant V^-(|x|)\leqslant\dfrac{3a}{2}$, $|x|\geqslant R$. 则

$$c_1\int_{B_R^c}(|\nabla u|^2+u^2)\mathrm{d}x\leqslant\int_{B_R^c}(|\nabla u|^2+V^-u^2)\mathrm{d}x\leqslant c_2\int_{B_R^c}(|\nabla u|^2+u^2)\mathrm{d}x,$$

这里 c_1,c_2 是两个正常数. 另一方面,对固定的 $R>0$,嵌入 $H_0^1(B_R)\to L^2(B_R)$ 是紧的. 所以存在两个正常数 c_3,c_4,使得

$$c_3\int_{R^N}(|\nabla u|^2+u^2)\mathrm{d}x\leqslant\int_{R^N}(|\nabla u|^2+V^-u^2)\mathrm{d}x\leqslant c_4\int_{R^N}(|\nabla u|^2+u^2)\mathrm{d}x.$$

即范数 $\|\cdot\|_1$ 等价于范数 $\|\cdot\|$.

引理 2　若 $h\in L^{N/2}(R^N)$, $u_n\rightharpoonup u$ 在 $H^1(R^N)$ 中,则

(1)存在子列 $\{u_n\}$,为了方便仍记为 $\{u_n\}$,使得 $\int_{R^N}hu_n^2\mathrm{d}x\to\int_{R^N}hu^2\mathrm{d}x$.

(2)对 $\phi\in H^1(R^N)$,$\langle T(u_n),\phi\rangle=\int_{R^N}hu_n\phi\mathrm{d}x\to\int_{R^N}hu\phi\mathrm{d}x$.

证明 (1)因为 $u_n\rightharpoonup u$ 在 $H^1(R^N)$ 中(其实只要 $u_n\rightharpoonup u$ 在 $D^{1,2}(R^N)$ 中),又 $H^1(R^N)\to L^{2^*}(R^N)$ 是连续的,所以存在 $\{u_n\}$ 的子列,为了方便仍记为 $\{u_n\}$,使得 $u_n^2\rightharpoonup u^2$ 在 $L^{\frac{2^*}{2}}(R^N)$ 中. 由 $h\in L^{N/2}(R^N)=L^{(2^*/2)'}(R^N)$,这里 $1/(2^*/2)+1/(2^*/2)'=1$,我们有 $\int_{R^N}hu_n^2\mathrm{d}x\to\int_{R^N}hu^2\mathrm{d}x$.

(2)我们断言:对任意 $\varepsilon>0$ 和 $\psi\in H^1(R^N)$,存在 $R>0$,使得 $\sup_{\|\phi\|_1\leqslant1}\int_{B_R^c}h\psi\phi\mathrm{d}x\leqslant\varepsilon\|\psi\|_1$. 事实上,由 Hölder's 不等式,

$$\sup_{\|\phi\|_1\leqslant1}\int_{B_R^c}h\psi\phi\mathrm{d}x\leqslant c_5\sup_{\|\phi\|_1\leqslant1}\left(\int_{B_R^c}h^{N/2}\mathrm{d}x\right)^{2/N}\cdot\left(\int_{B_R^c}\psi^{2^*}\mathrm{d}x\right)^{1/2^*}\cdot\|\phi\|_1\leqslant\varepsilon\|\psi\|_1. \tag{2}$$

其中 c_5 为正常数. 接着,由 $u_n\rightharpoonup u$ 在 $H^1(R^N)$ 中,我们有

$$\|T(u_n)-T(u)\|_{H^1(R^N)}\leqslant\sup_{\|\phi\|_1\leqslant1}\left|\int_{B_R^c}h(u_n-u)\phi\mathrm{d}x\right|+\sup_{\|\phi\|_1\leqslant1}\left|\int_{B_R}h(u_n-u)\phi\mathrm{d}x\right|.$$

由(2)和对固定 R,$u_n\to u$ 在 L^2(对任意的有界区域)中. 对任意 $\varepsilon>0$,我们得到 $\|T(u_n)-T(u)\|_{H^{-1}(R^N)}<\varepsilon$,即 $T(u_n)\to T(u)$ 在 $H^{-1}(R^N)$ 中.

引理 3 在假设(A_1)下,特征值问题:$-\Delta u+V^-(|x|)u=\mu V^+(|x|)u,u\in X$ 存在一列特征值:$0<\mu_1<\mu_2\leqslant\mu_3\leqslant\cdots\leqslant\mu_n\leqslant\cdots$,这列特征值趋向无穷,每一特征值是有限重,第一特征值是单重的且有正的特征函数. 特征函数序列组成空间 X 的一个正交基.

证明 我们只给出证明的概要. 对任意 $u\in X$,由 Riesz 表示定理和 X 是一个 Hilbert 空间知:存在唯一 $\omega\in X$,使得$-\Delta\omega+V^-(|x|)\omega=V^+(|x|)u$. 由假设$(A_1)$和引理 2,我们知道算子$(-\Delta+V^-)^{-1}V^+:X\to X,u\mapsto\omega$ 是正的紧算子. 则由 Hilbert-Schmidt 定理,我们得到了所要的结论.

2 $(PS)_c$ 条件

首先,我们定义与问题(1)对应的泛函:

$$I(u):=\frac{1}{2}\int_{R^N}(|\nabla u|^2+V^-|u|^2)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_{R^N}V^+|u|^2\mathrm{d}x-\int_{R^N}F(|x|,u)\mathrm{d}x,u\in X.$$

在假设(A_1),(A_2)下,可以证明:$I\in C^1(X,R)$,参见[9,引理 3.10],而且

$$\langle I'(u),\phi\rangle=\int_{R^N}(\nabla u\nabla\phi+V^-u\phi)\mathrm{d}x-\int_{R^N}V^+u\phi\mathrm{d}x-\int_{R^N}f(|x|,u)\phi\mathrm{d}x,\forall\phi\in X.$$

引理 4 在假设(A_1),(A_2),(A_3),(A_5),任意序列$\{u_n\}\subset X$ 满足 $I(u_n)\to c$,$I'(u_n)\to0$ 在 X 中,则该序列在 X 中有界.

证明 我们将用反证法来证明:$|\nabla u_n|_2$ 是有界的. 事实上,假设$|\nabla u_n|_2=t_n\to\infty$,令 $v_n=u_n/t_n$. 则我们有:$|\nabla v_n|_2=1$. 由 Sobolev 嵌入定理,存在 $v\in D^{1,2}(R^N)$,使得对有界区域 $\Omega\subset R^N$(有必要取子列),

$$\begin{aligned}&v_n\rightharpoonup v\text{ 在 }D^{1,2}(R^N)\text{ 中},v_n\to v\text{ 在 }L^t(\Omega)\text{ 中},1\leqslant t<2^*,\\&v_n\to v\ a.e.\ R^N,|v_n(x)|\leqslant\omega_t(x),\text{对某一 }\omega_t(x)\in L^t(\Omega).\end{aligned} \tag{3}$$

由$\{u_n\}$的定义,我们得到

$$I(u_n)=\frac{1}{2}\int_{R^N}(|\nabla u_n|^2+V^-|u_n|^2)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_{R^N}V^+|u_n|^2\mathrm{d}x-\int_{R^N}F(|x|,u_n)\mathrm{d}x. \tag{4}$$

$$\langle I(u_n),\phi\rangle=\int_{R^N}(\nabla u_n\nabla\phi+V^-u_n\phi)\mathrm{d}x-\int_{R^N}V^+u_n\phi\mathrm{d}x-\int_{R^N}f(|x|,u_n)\phi\mathrm{d}x,\forall\phi\in X. \tag{5}$$

在(5)式中除以 $t_n=|\nabla u_n|_2$,我们有

$$\int_{R^N}(\nabla v_n\nabla\phi+V^-v_n\phi)\mathrm{d}x-\int_{R^N}V^+v_n\phi\mathrm{d}x-\int_{R^N}\frac{f(|x|,u_n)}{t_n}\phi\mathrm{d}x.\to0. \tag{6}$$

$$\int_{R^N}\frac{f(|x|,u_n)}{t_n}\phi\mathrm{d}x=\int_{R^N}\frac{f(|x|,t_nv_n)}{t_n}\phi\mathrm{d}x=t_n^{q-2}\int_{R^N}|v_n|^{q-2}v_n\frac{f(|x|,t_nv_n)}{|t_nv_n|^{q-2}t_nv_n}\phi\mathrm{d}x. \tag{7}$$

在集合$\{x;v(x)\neq 0\}$中,我们有:$|t_nv_n|\to+\infty$. 由假设(A_2),(A_5),我们得到$|v_n|^{q-2}v_n\dfrac{f(|x|,t_nv_n)}{|t_nv_n|^{q-2}t_nv_n}\phi(x)\to |v|^{q-2}v\phi$. 在集合$\{x;v(x)=0\}$中,$v_n\to 0$. 由假设$(A_2)$,我们有$|v_n|^{q-2}v_n\dfrac{f(|x|,t_nv_n)}{|t_nv_n|^{q-2}t_nv_n}\phi(x)\to 0$.假定$\phi\in D(R^N)$,$\Omega=\mathrm{supp}(\phi)$,由假设$(A_2)$和(3),得$|v_n|^{q-2}v_n\dfrac{f(|x|,t_nv_n)}{|t_nv_n|^{q-2}t_nv_n}\phi(x)|\leqslant c_6(1+|\omega_{q-1}|^{q-1})\in L^1(\Omega)$. c_6为正常数. 故

$$\int_{R^N}|v_n|^{q-2}v_n\frac{f(|x|,t_nv_n)}{|t_nv_n|^{q-2}t_nv_n}\phi\mathrm{d}x\to\int_{R^N}|v|^{q-2}v\phi\mathrm{d}x.$$

在(6)中,令$n\to\infty$,由(7),我们知道$\int_{R^N}|v|^{q-2}v\phi\mathrm{d}x=0$.由于$\phi$是任意的,则$v=0$ a.e. 在R^N中.

在(5)中,令$\phi=u_n$,得

$$\langle I'(u_n),u_n\rangle=\int_{R^N}(\nabla u_n\nabla u_n+V^-u_nu_n)\mathrm{d}x-\int_{R^N}V^+u_nu_n\mathrm{d}x-\int_{R^N}f(|x|,u_n)u_n\mathrm{d}x.$$

在上式中除以t_n^2,我们有

$$\int_{R^N}(|\nabla v_n|^2+V^-|v_n|^2)\mathrm{d}x-\int_{R^N}V^+|v_n|^2\mathrm{d}x-\frac{1}{t_n^2}\int_{R^N}f(|x|,u_n)u_n\mathrm{d}x\to 0.\tag{8}$$

在(4)中除以t_n^2,得

$$\frac{1}{2}\int_{R^N}(|\nabla v_n|^2+V^-|v_n|^2)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_{R^N}V^+|v_n|^2\mathrm{d}x-\frac{1}{t_n^2}\int_{R^N}F(|x|,u_n)\mathrm{d}x\to 0.\tag{9}$$

(9)-(8)$\times\dfrac{1}{\alpha}$,由引理 2 和$v_n\rightharpoonup v$在$D^{1,2}(R^N)$,我们得到

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha}\right)\|v_n\|_1^2-\frac{1}{t_n^2}\int_{R^N}\left(F(|x|,u_n)-\frac{1}{\alpha}f(|x|,u_n)u_n\right)\mathrm{d}x\to 0.$$

由(A_3)和$\|v_n\|_1^2\geqslant 1$,我们得到一个矛盾. 因此,$|\nabla u_n|_2$是有界的.

由u_n的定义,$c+1+\|u_n\|_1\geqslant I(u_n)-\dfrac{1}{\alpha}\langle I'(u_n),u_n\rangle\geqslant\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{\alpha}\right)\|u_n\|_1^2-M$,其中$M$是正的常数. 所以$\{u_n\}$在$X$中有界.

引理 5　在假设(A_1),(A_2),(A_3),(A_4)下,任何序列$\{u_n\}\subset X$满足:$I(u_n)\to c$,$I^{'}(u_n)\to 0$在X中,则该序列有收敛子列.

证明　由引理 4,我们知道$\{u_n\}$在X中有界. 如有必要取子列,假设$u_n\rightharpoonup u$在X中. 由I和$\|\cdot\|_1$的定义,我们得到$\|u_n-u\|_1^2=\langle I'(u_n)-I'(u),u_n-u\rangle+\int_{R^N}V^+(u_n-u)^2\mathrm{d}x+\int_{R^N}(f(|x|,u_n)-f(|x|,u))(u_n-u)\mathrm{d}x$.如有必要取子列,由引理 2,我们有$\int_{R^N}V^+(u_n-u)^2\mathrm{d}x\to 0$. 与[9,Lemam 3.11]的证明类似,我们能够证明$\int_{R^N}(f(|x|,u_n)-f(|x|,u))(u_n-u)\mathrm{d}x\to 0$. 因此,$u_n\to u$在$X$中.

3　定理 1 的证明

在这一部分,我们将利用 Fountain 定理和对称的临界点原理证明定理 1.

定理 1 的证明　由对称的临界点原理,$I|_X$的临界点是问题(1)的解. 所以我们将寻找泛函I在空间X的临界点. 由假设(A_5),令$G=Z/2$,$I(u)$对G是不变映射. 下面,我们将证明 Fountain 定理的 4 个假设成立.

(1)首先,令$X_i:=\mathrm{span}\{\phi_i\}=R\phi_i$,$Y_k:=\oplus_{i=0}^kX_i$,$Z_k:=\overline{\oplus_{i=k}^{\infty}X_i}$, 由$(A_2)$,$(A_3)$,$(A_6)$,我们得到$C(|u|^{\alpha}-|u|^2)\leqslant F(x,u)$,其中$C$是正的常数. 因此,$I(u)\leqslant\dfrac{1}{2}\|u\|_1^2-\dfrac{1}{2}\int_{R^N}V^+u^2\mathrm{d}x-C|u|_{\alpha}^{\alpha}+C|u|_2^2$. 因为在有限维空间$Y_k$所有的范数都等价,Fountain 定理的假设$(B_1)$对充分大的$\rho_k>0$成立.

(2)我们定义$\beta_k=\sup\limits_{u\in Z_k,\|u\|_1=1}|u|_p$. 与[9,Lemma 3.8]的证明类似,我们可以证明$\beta_k\to 0,k\to\infty$. 由(A_2),(A_4),我们有$|F(|x|,u)|\leqslant\frac{d|u|^2}{6}+t|u|^p$,其中d是正的常数,使得$\|u\|_1^2\geqslant d|u|_2^2$. 在$Z_k$中,我们有

$$I(u)\geqslant\frac{1}{2}\|u\|_1^2-\frac{1}{2}\int_{R^N}V^+u^2\mathrm{d}x-\frac{d|u|_2^2}{6}-t|u|_p^p\geqslant\frac{1}{6}\|u\|_1^2-t\beta_k^p\|u\|_1^p.$$

其中k充分大,使得$1-\frac{1}{\mu_{k-1}}\geqslant\frac{2}{3}$, 这里$\mu_k$是引理3中的特征值. 取$r_k=(3tp\beta_k^p)^{\frac{1}{2-p}}$和$\|u\|_1=r_k$,则$I(u)\geqslant\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{3p}\right)(3tp\beta_k^p)^{\frac{2}{2-p}}$. 当$k\to\infty$,Fountain定理的假设$(B_2)$成立.

(3)由引理5,Fountain定理的假设(B_3)成立. 由G,X,X_i的定义,Fountain定理的假设(B_4)也成立. 因此,由Fountain定理,(1)有无界的解序列$u_k,k\in N,-u_k$也是(1)的解,因为I是偶的. 定理证毕.

推论1 在假设(A_1') $V(|x|)=V^+(|x|)-V^-(|x|)$,$V^{\pm}=\max\{\pm V(|x|),0\}$,$V(|\cdot|)^+\in L^{N/2}(R^N)\cap L^{\alpha}(R^N)\left(\alpha>\frac{N}{2}\right)$,$\mathrm{meas}\{x\in R^N:V^+(|x|)>0\}\neq 0$,$\exists R>0$,$\inf\limits_{|x|\geqslant R}V^-(|x|)=a>0$和$(A_2)$,$(A_3)$,$(A_4)$,$(A_5)$,$(A_6)$下,(1)有无界的解序列$\pm u_k,k\in N,\pm u_k$是径向对称的.

证明 令$\|u\|_1^2=\int_{R^N}(|\nabla u|^2+u^2)\mathrm{d}x$,和$X=\{u|u\in H^1_{O(N)}(R^N),\|u\|_1^2<\infty\}$,与定理1的证明类似,我们可以得到所要的结论.

[参考文献]

[1] BARTSCH T,WILLEM M. Infinitely many nonradial solutions of a Euclidean scalar field equation[J]. Journal of functional analysis,1993,117:447-460.

[2] STRUWE M. Multiple solutions of differential equations without the Palais-Smale condition[J]. Mathematische annalen,1992,261:339-412.

[3] STRAUSS W A. Existence of solitary waves in higher dimensions[J]. Communications in mathematical physics,1977,55:149-162.

[4] ALAMA S,DEL PINO M. Solutions of elliptic equations with indefinite nonlinearities via Morse theory and linking[J]. Annales DE L insttitut henri poincare-analyse nonlineaire,1996,13:95-115.

[5] BADIALE M,NABANA E. A remark on multiplicity of solutions for semilinear elliptic problems with indefinite nonlinearity[J]. Comptes rendus deI'sAcadémie des sciences-series I-mathematics,1996,323(2):151-156.

[6] LI Y Q,CHEN J Q. On a semilinear elliptic equation with indefinite linear part[J]. Nonlinear analysis,2002,48:399-410.

[7] CHEN J Q,LI S J. Existence and multiplicity of nontrivial solutions for elliptic equation on R^N with indefinite linear part[J]. Manuscripta mathematica,2003,111:221-239.

[8] COSTA D,TEHRANI H. Existence of positive solutions for a class of indefinite elliptic problems in R^N[J]. Calculus of variations and partial differential equations,2001,13:159-189.

[9] WILLEM M. Minimax Theorems[M]. Birkhäuser:Boston,1996.

[10] PALAIS R S. The principle of symmetric criticality[J]. Communications in mathematical physics,1979,69:19-30.

[责任编辑:陆炳新]