doi:10.3969/j.issn.1001-4616.2022.01.001

含不可微非线性项的四阶边值问题单侧全局区间分歧

沈文国[1],包理群[2],纳仁花[1]

(1.兰州工业学院基础学科部,甘肃 兰州 730050)
(2.兰州工业学院电子信息工程系,甘肃 兰州 730050)

[摘要] 本文首先建立一类含不可微非线性项从无穷远处发出的单侧全局区间分歧定理. 我们将研究下列问题结点解的存在性

$$\begin{cases} x^{(4)}=a(t)F(x), & t\in(0,1), \\ x(0)=x(1)=x''(0)=x''(1)=0, \end{cases}$$

其中,非线性项 $F=f+g$,　$f,g\in C(\mathbf{R})$,$|f(s)/s|\leqslant M_1$,$0<|s|\leqslant 1$,M_1 是一个正的常数;$|f(s)/s|\leqslant M_2$,$C<|s|$,C 是充分大的正常数,M_2 是一个正的常数;对于 $s\neq 0$,成立 $sg(s)>0$;存在 $g_0,g_\infty\in(0,\infty)$ 使得 $g_0=\lim_{|s|\to 0}g(s)/s$,$g_\infty=\lim_{|s|\to\infty}g(s)/s$. 应用上述结果,研究一类非线性四阶边值问题结点解的存在性.

[关键词] 四阶边值问题,单侧全局区间分歧,结点解

[中图分类号] O175.8　**[文献标志码]** A　**[文章编号]** 1001-4616(2022)01-0001-07

The Unilateral Global Bifurcation from Intervals for Fourth-Order Problems Which are Not Linearizable

Shen Wenguo[1],Bao Liqun[2],Na Renhua[1]

(1.Department of Basic Courses,Lanzhou Institute of Technology,Lanzhou 730050,China)
(2.Department of Electronic and Information Engineering,Lanzhou Institute of Technology,Lanzhou 730050,China)

Abstract: In this paper, we shall establish the unilateral global bifurcation theorem which bifurcates theorem from infinity of a class of nonlinear fourth-order problems with non-differentiable nonlinearity. We shall study the existence of nodal solutions for the following problem

$$\begin{cases} x^{(4)}=a(t)F(x), & t\in(0,1), \\ x(0)=x(1)=x''(0)=x''(1)=0, \end{cases}$$

where the nonlinear term F has the form $F=f+g$, where $f,g\in C(\mathbf{R})$, satisfying the conditions: $|f(s)/s|\leqslant M_1$, $0<|s|\leqslant 1$, where M_1 is a positive constant; $|f(s)/s|\leqslant M_2$, $C<|s|$, for some positive constant C large enough, where M_2 is a positive constant; $sg(s)>0$ for $s\neq 0$; There exist $g_0,g_\infty\in(0,\infty)$ such that $g_0=\lim_{|s|\to 0}g(s)/s$, $g_\infty=\lim_{|s|\to\infty}g(s)/s$. By applying the above result, we study the existence of nodal solutions for a class of nonlinear fourth-order boundary value problems.

Key words: fourth-order problems, global interval bifurcation, nodal solutions

下列四阶边值问题表示两端简单支撑梁的方程

$$\begin{cases} x^{(4)}=a(t)F(x), & t\in(0,1), \\ x(0)=x(1)=x''(0)=x''(1)=0, \end{cases} \tag{1}$$

2012 年,代国伟[1]建立了与问题(1)对应的下列线性特征值问题的谱理论

收稿日期:2020-05-21.

基金项目:兰州工业学院'开物'科研创新团队支持计划项目(2018KW-03)、国家自然科学基金项目(11561038)、甘肃省自然科学基金项目(20JR5RA377).

通讯作者:沈文国,博士,教授,研究方向:非线性泛函微分方程与分歧理论. E-mail:shenwg369@163.com

$$\begin{cases}x^{(4)}=\lambda a(t)(x), & t\in(0,1),\\ x(0)=x(1)=x''(0)=x''(1)=0,\end{cases}\tag{2}$$

随后,代国伟等[2]建立了问题(1)的单侧全局分歧结果. 然而,上述问题都是非线性项在零处和无穷远处满足渐进线性增长条件.

Berestycki[3]研究了一类非线性项在零处和无穷远处满足非渐进线性增长条件的二阶问题的区间分歧问题. Schmitt 和 Smith[4]部分地提升了[3]的研究结果. 最近,马如云等[5]研究了一类非线性项在零处和无穷远处满足非渐进线性增长条件的二阶问题的区间分歧问题,提升了[3]的研究结果. 随后,代国伟等[6-7]研究了与[3]和[5]相似的问题.

文献[8]研究了下列问题

$$\begin{cases}x^{(4)}=\lambda a(t)x+F(t,x,x',\lambda), & t\in(0,1),\\ x(0)=x(1)=x''(0)=x''(1)=0,\end{cases}\tag{3}$$

其中,非线性项 $F=f+g$, $f,g\in C([0,1]\times\mathbf{R}^3)$ 且满足下列条件:

(H1)　$a\in C([0,1],(0,\infty))$ 在 $[0,1]$ 的任何子区间上都有 $a(t)\neq 0$ 成立.

(H2)　对任何 $t\in[0,1]$, $0<|x|\leqslant 1$, $|s|\leqslant 1$ 以及 $\lambda\in\mathbf{R}$,都有 $|f(t,x,s,\lambda)/x|\leqslant M_1$ 成立,其中 M_1 是一个正常数.

(H3)　在 $(x,s)=(0,0)$ 附近,对于 $t\in[0,1]$ 和 λ 在有界集上取值时, $g(t,x,s,\lambda)=o(|x|+|s|)$ 一致成立.

当满足条件(H1)-(H3)时,作者[8]获得了问题(3)从零点发出的单侧全局分歧定理如下:

定理 1[8]　令(H1),(H2),(H3)成立. 设 $d_1=M_1/a_0$,其中 $a_0=\min_{t\in[0,1]}a(t)$,令 $I_k^0=[\lambda_k-d_1,\lambda_k+d_1]$,对每个 $k\in\mathbf{N}$. $L_k^+\cup(I_k^0\times\{0\})$ 的连通分支 D_k^+ 包含 $I_k^0\times\{0\}$ 是无界的并且属于 $\Phi_k^+\cup(I_k^0\times\{0\})$,同时 $L_k^-\cup(I_k^0\times\{0\})$ 的连通分支 D_k^- 包含 $I_k^0\times\{0\}$ 是无界的并且属于 $\Phi_k^-\cup(I_k^0\times\{0\})$.

1　预备知识

令 $Y=C[0,1]$,其上范数为 $\|x\|_\infty=\max\limits_{t\in[0,1]}|x(t)|$. 令 $E=\{x\in C^3[0,1]\,|\,x(0)=x(1)=x''(0)=x''(1)=0\}$,其上范数为

$$\|x\|=\max\{\|x\|_\infty,\|x'\|_\infty,\|x''\|_\infty,\|x'''\|_\infty\}.$$

定义线性算子 $L:D(L)\subset E\to Y$

$$Lx=x^{(4)},x\in D(L),$$

其中 $D(L)=\{x\in C^4[0,1]\,|\,x(0)=x(1)=x''(0)=x''(1)=0\}$. 则 L 是闭算子且 $L^{-1}:Y\to E$ 是全连续算子. 令 $I=(0,1)$.

接下来,从文献[1,2]中引述下列预备知识.

定义 1[2]　令 $u\in E$ 和 $t_*\in I$ 使得 $u(t_*)=u''(t_*)=0$ 成立. 若 $u'(t_*)\neq 0$ 或 $u'''(t_*)\neq 0$,则称 t_* 是一个推广的简单零点. 否则,称 t_* 是一个推广的加倍零点. 假如 u 不存在一个推广的加倍零点,则称 u 是一个结点解.

用 S_k^+ 记为 E 中在 $(0,1)$ 上有 $k-1$ 推广的简单零点,并且在 $t=0$ 附近为正的函数的集合,令 $S_k^-=-S_k^+$,和 $S_k=S_k^+\cup S_k^-$ 两个集合是 E 中不相交的开集. 令 $\Phi_k^\nu=\mathbf{R}\times S_k^\nu$, $\nu\in\{+,-\}$ 和 $\Phi_k=\mathbf{R}\times S_k$ 伴随着乘积拓扑.

当 a 满足(H1),下列引理成立:

引理 1[1-2]　令(H1)成立. 则

(1)问题(2)存在一个无穷正特征值序列

$$0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_k\to+\infty,k\to+\infty.$$

(2)每个特征值是简单的. 每个特征值 $\lambda_k(a)$ 对应着唯一一个特征函数 ψ_k,并且其在 $(0,1)$ 中有 $k-1$ 个推广的简单零点且在 0 附近是正的.

引理 2[2]　若 (λ,x) 是(3)在满足假设(H2)和(H3)的非平凡解且 x 存在一个推广的加倍零点,则 $x\equiv 0$.

注 1　由引理 2,当满足条件(H2)和(H3)时,假如 (λ,x) 是问题(3)的一个非平凡解,则 $x\in\cup_{k=1}^\infty S_k^\nu$.

2 无穷远处单侧全局区间分歧

在空间 $\mathbf{R}\times E$ 中增加无穷远点 $\{(\lambda,\infty)\mid\lambda\in\mathbf{R}\}$.假设问题(3)的非线性项 F 满足 $F=f+g$,其中 $f,g\in C([0,1]\times\mathbf{R}^3)$,且满足下列条件:

(H4) 对任何 $t\in[0,1]$,$C<|x|$,$C<|s|$ 以及任意 $\lambda\in\mathbf{R}$,都有 $|f(t,x,s,\lambda)/x|\leqslant M_2$ 成立,其中 M_2 是一个正常数.

(H5) 在 $(x,s)=(\infty,\infty)$ 附近,对于 $t\in[0,1]$ 和 λ 在有界集上取值时,$g(t,x,s,\lambda)=o(|x|+|s|)$ 一致成立.

当满足条件(H4)和(H5)时,$\mathfrak{I}$ 记为问题(3)在 $\mathbf{R}\times E$ 中非平凡解的闭包,对于 $u\in S_k^\nu$ 和 $\mathfrak{I}_k=\mathfrak{I}_k^+\cup\mathfrak{I}_k^-$,$\mathfrak{I}_k^\nu$ 记为问题(3)在 $\mathfrak{I}$ 中的子集.

定理 2 令(H1),(H4),(H5)成立. 设 $d_2=M_2/a_0$,其中 $a_0=\min_{t\in[0,1]}a(t)$,对每个 $k\in\mathbf{N}$,令 $I_k^\infty=[\lambda_k-d_2,\lambda_k+d_2]$. 对每个 $\nu\in\{+,-\}$,存在 $\mathfrak{I}_k^\nu\cup(I_k^\infty\times\{\infty\})$ 的包含 $I_k^\infty\times\{\infty\}$ 的无界连续分支 D_k^ν. 进而,若 $\Lambda\subset\mathbf{R}$ 是一个区间,使得 $\Lambda\cap(\cup_{k=1}^\infty I_k^\infty)=I_k^\infty$ 且 $\mathbf{M}$ 是 $I_k^\infty\times\{\infty\}$ 的一个领域,$\mathbf{M}$ 在 $\mathbf{R}$ 上的投影属于 Λ 且在 E 上的投影远离 0 并且有界,则要么成立

1^o $D_k^\nu-\mathbf{M}$ 在 $\mathbf{R}\times E$ 上有界并且 $D_k^\nu-\mathbf{M}$ 经过 $T=\{(\lambda,0)\mid\lambda\in\mathbf{R}\}$.

要么成立

2^o $D_k^\nu-\mathbf{M}$ 是无界的.

假如 2^o 成立且 $D_k^\nu-\mathbf{M}$ 在 $\mathbf{R}$ 上存在一个有界投影,则对于一些 $j\neq k$,$D_k^\nu-\mathbf{M}$ 经过 $I_j^\infty\times\{\infty\}$. 进而,存在 $I_j^\infty\times\{\infty\}$ 的一个邻域 $\mathbf{N}\subset\mathbf{M}$ 使得对于 $\nu\in\{+.-\}$,成立 $(D_k^\nu\cap\mathbf{N})\subset\Phi_k^\nu\cup(I_k^\infty\times\{\infty\})$.

证明 相似于[9,定理 1.6]的证明,但是为了方便,给出一个大概的框架.

假设 $(\lambda,x)\in\mathfrak{I}$ 且 $\|x\|\neq0$,用 $\|x\|^2$ 除以(3)两边且令 $y=x/\|x\|^2$,则

$$\begin{cases}y^{(4)}(t)=\lambda a(t)y(t)+\dfrac{F(t,x,x',\lambda)}{\|x\|^2}, & t\in(0,1),\\ y(0)=y(1)=y''(0)=y''(1)=0.\end{cases}\tag{4}$$

定义

$$\tilde{f}(t,y,y',\lambda)=\begin{cases}\|y\|^2f\left(t,\dfrac{y}{\|y\|^2},\dfrac{y'}{\|y\|^2},\lambda\right), & y\neq0,\\ 0, & y=0.\end{cases}$$

和

$$\tilde{g}(t,y,y',\lambda)=\begin{cases}\|y\|g\left(t,\dfrac{y}{\|y\|^2},\dfrac{y'}{\|y\|^2},\lambda\right), & y\neq0,\\ 0, & y=0.\end{cases}$$

显然,(4)等价于

$$\begin{cases}y^{(4)}(t)=\lambda a(t)y(t)+\tilde{f}(t,y,y',\lambda)+\tilde{g}(t,y,y',\lambda), & t\in(0,1),\\ y(0)=y(1)=y''(0)=y''(1)=0,\end{cases}\tag{5}$$

显然,$(\lambda,0)$ 是(5)的一个解. 通过简单计算,由(H4),(H5)可得

(H6) 对任何 $t\in[0,1]$,$0<|y|\leqslant1$,$|y'|\leqslant1$ 以及 $\lambda\in\mathbf{R}$,都有 $|\tilde{f}(t,y,y',\lambda)/y|\leqslant M_2$ 成立,其中 M_2 是一个正常数.

(H7) 在 $(y,y')=(0,0)$ 附近,对于 $t\in[0,1]$ 和 λ 在有界集上取值时,$\tilde{g}(t,y,y',\lambda)=o(|y|+|y'|)$ 一致成立.

现在,将定理 1 用到问题(5),可知 $L_k^+\cup(I_k^0\times\{0\})$ 和 $L_k^-\cup(I_k^0\times\{0\})$ 存在两个 分别包括 $I_k^0\times\{0\}$ 的无界连续统 $C_{k,0}^+$ 和 $C_{k,0}^-$ 使得 $C_{k,0}^+\subset\Phi_k^+\cup(I_k^0\times\{0\})$ 和 $C_{k,0}^-\subset\Phi_k^-\cup(I_k^0\times\{0\})$.

对于每个 $\nu\in\{+.-\}$,在映射 $y\to\dfrac{y}{\|y\|^2}=x$. $C_{k,0}^\nu\to D_k^\nu$ 满足(3). 显然,D_k^ν 满足定理的结论.

最后,可以证明存在 $I_k^{\infty}\times\{\infty\}$ 的一个邻域 $\mathbf{N}\subset\mathbf{M}$ 使得 $(D_k^{\nu}\cap\mathbf{N})\subset\Phi_k^{\nu}\cup(I_k^{\infty}\times\{\infty\})$, $\nu\in\{+,-\}$. 接下来,仅仅证明 $\nu=+$,因为 $\nu=-$ 的情况相似可得. 显然,逆映射 $y\to y/\|y\|^2=x$. 映 $I_k^0\times\{0\}$ 到 $I_k^{\infty}\times\{\infty\}$. 令 O 是 $I_k^0\times\{0\}$ 的一个无界邻域.则 $(C_{k,0}^{+}\cap(O\setminus(I_k^0\times\{0\})))\subset\Phi_k^{+}$,其中 $C_{k,0}^{+}$ 是包括 $I_k^0\times\{0\}$ 且包含在 $\Phi_k^{+}\cup(I_k^{\infty}\times\{\infty\})$ 中的无界子连续统.同时,通过逆映射 $y\to y/\|y\|^2=x$, $C_{k,0}^{+}\cap(O\setminus(I_k^0\times\{0\}))$ 变为 $I_k^{\infty}\times\{\infty\}$ 的一个去心领域 $\mathbf{N}^0$. 显然,$(\lambda,y)\in C_{k,0}^{+}\cap(O\setminus(I_k^0\times\{0\}))$ 显示存在一个常数 c_0 使得 $0<\|y\|\leqslant c_0$. 进而,$(\lambda,x)\in\mathbf{N}^0$ 说明 $1/c_0\leqslant\|x\|<+\infty$.取 $\mathbf{N}:=\mathbf{N}_0\cup(I_k^{\infty}\times\{\infty\})$,则有 $(D_k^{+}\cap\mathbf{N})\subset(\Phi_k^{+}\cup(I_k^{\infty}\times\{\infty\}))$.

3　应用

在这部分,通过定理 1,定理 2,可得下列问题结点解的存在性

$$\begin{cases}x^{(4)}=a(t)F(x), & t\in(0,1),\\ x(0)=x(1)=x''(0)=x''(1)=0,\end{cases}\tag{6}$$

其中 a 满足(H1). 假设非线性项 F 满足 $F=f+g$,其中 $f,g\in C(\mathbf{R})$ 且满足:

(A1) $|f(s)/s|\leqslant M_1$, $0<|s|\leqslant 1$,其中 M_1 是一个正常数.

(A2) 对一些充分大的正常数 C,成立 $|f(s)/s|\leqslant M_2$, $C<|s|$,其中 M_2 是一个正常数.

(A3) 对于 $s\neq 0$,成立 $sg(s)>0$.

(A4) 存在 $g_0,g_\infty\in(0,\infty)$ 使得

$$g_0=\lim_{|s|\to 0}\frac{g(s)}{s},\ g_\infty=\lim_{|s|\to\infty}\frac{g(s)}{s}.$$

以下是本文主要结果:

定理 3　令 $a_0=\min_{t\in[0,1]}a(t)$, $a^0=\max_{t\in[0,1]}a(t)$.假设(H1),(A1),(A2),(A3),和(A4)成立. 对一些 $k\in\mathbf{N}$,假设 $g_0a_0>M_1a^0$ 和 $g_\infty a_0>M_1a^0$ 成立,要么成立

$$g_\infty+\frac{M_2a^0}{a_0}<\lambda_k<g_0-\frac{M_1a^0}{a_0},\tag{7}$$

要么成立

$$g_0+\frac{M_1a^0}{a_0}<\lambda_k<g_\infty-\frac{M_2a^0}{a_0}.\tag{8}$$

则问题(6)存在两个解 x_k^+,x_k^-,使得 x_k^+ 在(0,1)中存在 $k-1$ 推广的简单零点且在 $t=0$ 附近为正,并且 x_k^- 在(0,1)中存在 $k-1$ 推广的简单零点且在 $t=0$ 附近为负.

定理 4　假设(H1),(A1),(A2),(A3),和(A4)成立. 对一些 $k\in\mathbf{N}$,假设 $g_0a_0>M_1a^0$ 并且 $g_\infty a_0\leqslant M_2a^0$ 成立,对于

$$g_\infty+\frac{M_2a^0}{a_0}<\lambda_k<g_0-\frac{M_1a^0}{a_0},$$

定理 3 的结论是有效的.

定理 5　假设(H1),(A1),(A2),(A3),和(A4)成立. 对一些 $k\in\mathbf{N}$,假设 $g_0a_0\leqslant M_1a^0$ 并且 $g_\infty a_0>M_2a^0$ 成立,对于

$$g_0+\frac{M_1a^0}{a_0}<\lambda_k<g_\infty-\frac{M_2a^0}{a_0},$$

定理 3 的结论是有效的.

注 2　由(A4),可得存在一个正常数 M_3,对所有 $s\neq 0$,使得 $g(s)/s\geqslant M_3$ 成立.

注 3　假如 $M_i\equiv 0(i=1,2)$,则定理 4 和 5 的情况不会发生,并且定理 3 等价于[2,定理 4.1](当权函数为 $g(t)>0$).

为了证明定理 3,需要下列结果.

引理 3　假设(H1),(A1),(A2),(A3),和(A4)成立. 对一些 $k\in\mathbf{N}$,假设 $g_0a_0>M_1a^0$ 和 $g_\infty a_0>M_2a^0$ 成立,要么(7)成立,要么(8)成立,则

(1)分别存在 $L_k^+\cup(I_k^0\times\{0\})$ 和 $L_k^-\cup(I_k^0\times\{0\})$ 的两个不同的无界连通分支 $D_{k,0}^+$ 和 $D_{k,0}^-$ 分别满足 $I_k^0\times\{0\}\subseteq D_{k,0}^+$ 和 $I_k^0\times\{0\}\subseteq D_{k,0}^-$，并且 $D_{k,0}^+\subseteq \Phi_k^+\cup(I_k^0\times\{0\})$ 和 $D_{k,0}^-\subseteq\Phi_k^-\cup(I_k^0\times\{0\})$.

(2)分别存在 $\mathfrak{I}_k^+\cup(I_k^\infty\times\{\infty\})$ 和 $\mathfrak{I}_k^-\cup(I_k^\infty\times\{\infty\})$ 的两个不同的无界连通分支 $D_{k,\infty}^+$ 和 $D_{k,\infty}^-$，并且它们满足定理 2 的条件. 进而，存在 $I_k^\infty\times\{\infty\}$ 的一个邻域 $\mathbf{N}\subset\mathbf{M}$ 使得对于 $\nu\in\{+.-\}$，成立 $(D_{k,\infty}^\nu\cap\mathbf{N})\subset(\Phi_k^\nu\cup(I_k^\infty\times\{\infty\}))$.

证明 首先，研究下列问题的分歧现象

$$\begin{cases}x^{(4)}=\lambda a(t)g(x)+a(t)f(x), & t\in(0,1),\\ x(0)=x(1)=x''(0)=x''(1)=0,\end{cases}\tag{9}$$

其中 $\lambda>0$ 是一个参数.

(1)显然，由条件(A1)可得

$$\left|\frac{a(t)f(s)}{s}\right|\leqslant M_1a^0, 0<|s|\leqslant 1.\tag{10}$$

令 $\zeta\in C(\mathbf{R},\mathbf{R})$ 使得

$$g(x)=g_0x+\zeta(x),\tag{11}$$

其中 $\lim\limits_{|x|\to 0}\zeta(x)/x=0$. 令 $\bar{\zeta}(x)=\max\limits_{0\leqslant|s|\leqslant x}|\zeta(s)|$，其中 $\bar{\zeta}(x)$ 是非减的且

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\bar{\zeta}(x)}{x}=0.$$

进而可得

$$\frac{|\zeta(x)|}{\|x\|}\leqslant\frac{\bar{\zeta}(|x|)}{\|x\|}\leqslant\frac{\bar{\zeta}(\|x\|_\infty)}{\|x\|}\leqslant\frac{\zeta(\|x\|)}{\|x\|}, \|x\|\to 0.\tag{12}$$

因此，由(9)，(10)，(11)和(12)可知条件(H2)和(H3)成立. 进而，令 $d_1=M_1a^0/g_0a_0$ 和 $I_k^0=\left[\frac{\lambda_k}{g_0}-d_1,\frac{\lambda_k}{g_0}+d_1\right]$. 由定理 1，可得结论.

(2)显然，由条件(A2)可得

$$\left|\frac{a(t)f(s)}{s}\right|\leqslant M_2a^0, C<|s|.\tag{13}$$

令 $\xi\in C(\mathbf{R},\mathbf{R})$ 使得

$$g(x)=g_0x+\xi(x),\tag{14}$$

其中 $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\xi(x)/x=0$. $\bar{\xi}(x)=\max\limits_{0\leqslant|s|\leqslant x}|\xi(s)|$，则 $\bar{\xi}(x)$ 是非减的且

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\bar{\xi}(x)}{x}=0.\tag{15}$$

进而，由(15)可得

$$\frac{|\xi(x)|}{\|x\|}\leqslant\frac{\bar{\xi}(|x|)}{\|x\|}\leqslant\frac{\bar{\xi}(\|x\|_\infty)}{\|x\|}\leqslant\frac{\bar{\xi}(\|x\|)}{\|x\|}, \|x\|\to+\infty.\tag{16}$$

因此，由(13)，(14)和(16)可知条件(H4)和(H5)成立. 进而，令 $d_2=M_2a^0/g_\infty a_0$ 和 $I_k^\infty=\left[\frac{\lambda_k}{g_\infty}-d_2,\frac{\lambda_k}{g_\infty}+d_2\right]$.

由定理 2，可得下列结果.

引理 4 $D_{k,0}^\nu$ 和 $D_{k,\infty}^\nu(\nu=\{+,-\})$ 可由引理 3 获得，则 $D_{k,0}^+=D_{k,\infty}^+$ 和 $D_{k,0}^-=D_{k,\infty}^-$.

证明 仅证 $D_{k,0}^+=D_{k,\infty}^+$，因为 $D_{k,0}^-=D_{k,\infty}^-$ 的证明是相似的.

(1)下列将证明定理 2 中的 1^o 发生.

可以证明 T 的一些点 $(\lambda_*,0)$ 经过 $D_{k,\infty}^+$. 事实上，假如上述结论成立，可以获得 $\lambda_*\in I_k^0$. 反设 $\lambda_*\notin I_k^0$，因此对一些 $j\neq k$，成立 $\lambda_*\in I_j^0$. 因此 $(D_{k,\infty}^+\cap\mathbf{N})\subset D_{k,\infty}^+\subset D_{j,\infty}^+\subset(\Phi_j^+\cup(I_j^\infty\times\{0\}))$，记 $(D_{k,\infty}^+\cap\mathbf{N})\cap(\mathbf{R}\times\{0\})=\phi$，与 $(D_{k,\infty}^+\cap\mathbf{N})\subset(\Phi_k^+\cup(I_k^\infty\times\{\infty\}))$ 矛盾. 因此 $\lambda_*\in I_k^0$，进而 $D_{k,0}^+=D_{k,\infty}^+$.

(2)下列证明定理 2 的 2^o 不发生.

反设定理 2 的 2^o发生,则可以推出矛盾. 分如下两步来证明.

第一步　下面证明 $D^+_{k,\infty}-\mathbf{M}$ 在 $\mathbf{R}$ 上存在一个有界投影.

首先,证明 $D^+_{k,\infty}\subset\Phi^+_k$. 假如 $(D^+_{k,\infty}-(D^+_{k,\infty}\cap\mathbf{N}))\not\subset\Phi^+_k$,则 存在$(\mu,x)\in(D^+_{k,\infty}-(D^+_{k,\infty}\cap\mathbf{N}))\cap(\mathbf{R}\times\partial S_k)$. 因为 $x\in\partial S_k$,通过引理 2,可得 $x\equiv0$,换言之定理 2 中的 1^o发生,产生矛盾.

相反,假设

$$(\mu_n,y_n)\in D^+_{k,\infty}-\mathbf{M}\text{ 使得}\lim_{n\to\infty}\mu_n=\infty.$$

进而

$$y^{(4)}{}_n(t)=\mu_n a(t)g(y_n)+a(t)f(y_n).$$

令

$$0=\tau(0,n)<\tau(1,n)<\tau(2,n)\cdots<\tau(k-1,n)<\tau(k,n)=1,$$

记为 y_n 在(0,1)中的推广的简单零点. 则,若有必要,选择如下的一个子序列,

$$\lim_{n\to\infty}\tau(l,n)=\tau(l,\infty),l\in\{0,1,\cdots,k\}.$$

可以断言存在 $l_0\in\{0,1,\cdots,k\}$. 使得

$$\tau(l_0,\infty)<\tau(l_0+1,\infty).$$

否则,下式成立

$$1=\sum_{l=0}^{k-1}(\tau(l+1,n)-\tau(l,n))\to\sum_{l=0}^{k-1}(\tau(l+1,\infty)-\tau(l,\infty))=0.$$

产生矛盾.

令 $(\alpha,\beta)\subset(\tau(l_0,\infty),\tau(l_0+1,\infty))$,其中 $\alpha<\beta$.对所有充分大的 n,成立 $(\alpha,\beta)\subset(\tau(l_0,n),\tau(l_0+1,n))$. 因此 y_n在(α,β)中不会变号.由注 2,(A1)和(A2),可得 $\lim_{n\to\infty}\left[\mu_n\dfrac{g(y_n(t))}{y_n(t)}+\dfrac{f(y_n(t))}{y_n(t)}\right]=\infty$ 对任何 $t\in(\alpha,\beta)$.由[10,引理 4]的证明(也可以参考[10,第 43 页]的最后一段的注释),可知对所有充分大的 n,y_n 在(α,β)中一定变号,与 y_n在(α,β)中不变号相矛盾.

第二步　可以证明对一些 $j\neq k$,$D^+_{k,\infty}-\mathbf{M}$ 经过 $I^\infty_j\times\{\infty\}$ 是不可能的.

反设 $D^+_{k,\infty}-\mathbf{M}$ 经过 $I^\infty_j\times\{\infty\}$ 对一些 $j\neq k$. 因此存在 $I^\infty_j\times\{\infty\}$的一个邻域 $\widetilde{\mathbf{N}}\subset\widetilde{\mathbf{M}}$ 使得 $(D^+_{k,\infty}-\mathbf{M})\cap(\widetilde{\mathbf{N}}\backslash(I^\infty_j\times\{\infty\}))\subset\Phi^+_j$,其中 $\widetilde{\mathbf{M}}$ 是满足定理 2 假设的 $I^\infty_j\times\{\infty\}$ 的一个邻域,与 $D^+_{k,\infty}\subset\Phi^+_k$矛盾.

定理 3 的证明:

由引理 3 和引理 4,为了简单起见,可以记为 $D^+_k=D^+_{k,0}=D^+_{k,\infty}$ 和 $D^-_k=D^-_{k,0}=D^-_{k,\infty}$.

显然,问题(8)形如 $(1,x)$ 的解将产生问题(5)的一个解 x.

此时,$d_1<1,d_2<1$. 由(6),可得

$$\frac{\lambda_k}{g_0}+d_1<1,\frac{\lambda_k}{g_\infty}-d_2>1,\tag{17}$$

由(7),可得

$$\frac{\lambda_k}{g_0}+d_1<1,\frac{\lambda_k}{g_\infty}-d_2>1,\tag{18}$$

由 $I^0_k=\left[\dfrac{\lambda_k}{g_0}-d_1,\dfrac{\lambda_k}{g_0}+d_1\right]$和 $I^\infty_k=\left[\dfrac{\lambda_k}{g_\infty}-d_2,\dfrac{\lambda_k}{g_\infty}+d_2\right]$,进而 $\mathbf{R}\times E$ 的子集 $I^0_k\times E$ 和 $I^\infty_k\times E$ 可以被超平面$\{1\}\times E$ 分离.进而,D^+_k和 D^-_k 在 $\mathbf{R}\times E$ 中穿过超平面 $\{1\}\times E$.

定理 4 的证明　类似于定理 3 的证明. 此时,由 $d_1<1,d_2\geqslant1$,可知(17)成立. 由 $d_2\geqslant1$,可知(18)不可能成立.

定理 5 的证明　类似于定理 3 的证明.

此时,$d_1\geqslant1,d_2<1$,进而(18)成立. 由 $d_1\geqslant1$,可知(17)不可能成立.

注 4　如果 $d_1\geqslant1,d_2\geqslant1$,则(17)和(18)是不可能成立,进而 $\mathbf{R}\times E$ 中的子集 $I^0_k\times E$ 和 $I^\infty_k\times E$ 不可能被

超平面$\{1\}\times E$分离. 此种情况下,不能找到一个适合的r区间,使得问题(5)的结点解存在.在这种情况下,进一步研究结点解的存在性是一个有趣的问题.

通过应用与定理3,4和5相似的方法,可以获得如下[11,定理3.1]的推广结果.

定理6 假设(H1),(A1),(A2),(A3),和(A4)成立. 对一些$k\in\mathbf{N}$和$j\in\{0\}\cup\mathbf{N}$,假设$g_0a_0>M_1a^0$和$g_\infty a_0>M_1a^0$成立,要么成立

$$g_\infty+\frac{M_2a^0}{a_0}<\lambda_k<\lambda_{k+1}\cdots<\lambda_{k+j}<g_0-\frac{M_1a^0}{a_0},\tag{19}$$

要么成立

$$g_0+\frac{M_1a^0}{a_0}<\lambda_k<\lambda_{k+1}\cdots<\lambda_{k+j}<g_\infty-\frac{M_2a^0}{a_0}.\tag{20}$$

对于$i=0,1,\cdots j$,则问题(5)存在$2(j+1)$个解x_{k+i}^+,x_{k+i}^-,使得在$(0,1)$中存在$k+i-1$个推广的简单零点且x_{k+i}^+在$t=0$附近为正,并且x_{k+i}^-在$(0,1)$中存在$k+i-1$个推广的简单零点且在$t=0$附近为负.

定理7 假设(H1),(A1),(A2),(A3),和(A4)成立. 对一些$k\in\mathbf{N}$和$j\in\{0\}\cup\mathbf{N}$,假设$g_0a_0>M_1a^0$并且$g_\infty a_0\leqslant M_2a^0$成立,对于

$$g_\infty+\frac{M_2a^0}{a_0}<\lambda_k<\lambda_{k+1}\cdots<\lambda_{k+j}<g_0-\frac{M_1a^0}{a_0},$$

则定理6的结论成立.

定理8 假设(H1),(A1),(A2),(A3),和(A4)成立. 对一些$k\in\mathbf{N}$和$j\in\{0\}\cup\mathbf{N}$,假设$g_0a_0\leqslant M_1a^0$并且$g_\infty a_0>M_2a^0$成立,对于

$$g_0+\frac{M_1a^0}{a_0}<\lambda_k<\lambda_{k+1}\cdots<\lambda_{k+j}<g_\infty-\frac{M_2a^0}{a_0},$$

则定理6的结论成立.

[参考文献]

[1] DAI G W. Spectrum of Navier p-biharmonic problem with sign-changing weight[J]. arXiv:1207.7159vl[math.CA] 31 Jul 2012.

[2] DAI G W,HAN X L. Global bifurcation and nodal solutions for fourth-order problems with sign-changing weight[J]. Applied mathematics and computation,2013,219:9399-9407.

[3] BERESTYCKI H. On some nonlinear Sturm-Liouville problem[J]. Journal of differential equations,1977,26:375-390.

[4] SCHMITT K,SMITH H L. On eigenvalue problems for nondifferentiable mappings,some aspects of nonlinear eigenvalue problems[J]. Journal of differential equations,1979,33:294-319.

[5] MA R Y,DAI G W. Global bifurcation and nodal solutions for a Sturm-Liouvilleproblem with a nonsmooth nonlinearity[J]. Journal of functional analysis,2013,265:1443-1459.

[6] DAI G W,MA R Y. Bifurcation from intervals for Sturm-Liouville problems and its applications[J]. Electronic journal of differential equations,2014(3):1-10.

[7] DAI G W,MA R R. Global bifurcation,Berestycki´s conjecture and one-sign solutions for p-Laplacian[J]. Nonlinear analysis,2013,91:51-59.

[8] SHEN W G,HE T. Unilateral global bifurcation from intervals for fourth-order problems and its applications[J]. Discrete dynamics in nature and society,2016,Article ID 5956713,15.

[9] RABINOWITZ P H. On bifurcation from infinity[J]. Journal of differential equations,1973,14:462-475.

[10] ELIAS U. Eigenvalue problems for the equations $Ly+\lambda p(x)y=0$[J]. Journal of differential equations,1978,29(1):28-57.

[11] MA R Y. Nodal solutions of boundary value problem of fourth-order ordinary differential equations[J]. Journal of mathematical analysis and applications,2006,319(2):424-434.

[责任编辑:陆炳新]