第 45 卷第 1 期 南京师大学报(自然科学版) Vol. 45 No. 1
2022 年 3 月 JOURNAL OF NANJING NORMAL UNIVERSITY(Natural Science Edition) Mar,2022

doi:10.3969/j.issn.1001-4616.2022.01.003

# 一类三阶分圆多项式的高度

张 彬[1],孙雯宇[2],杜金征南[1],毕昕宇[1]

(1.曲阜师范大学数学科学学院,山东 曲阜 273165)
(2.山东财经大学数学与数量经济学院,山东 济南 250014)

[摘要] 设 $A(n)$ 表示 $n$ 次分圆多项式的所有系数绝对值的最大值. 本文在 $5<q<r$ 为素数且满足 $r\equiv \pm 3(\bmod 5q)$ 的条件下,证明了 $2\leqslant A(5qr)\leqslant 3$.

[关键词] 分圆多项式,三阶分圆多项式,分圆多项式的高度

[中图分类号]O156.2 [文献标志码]A [文章编号]1001-4616(2022)01-0012-05

# The Height of a Family of Ternary Cyclotomic Polynomials

Zhang Bin[1],Sun Wenyu[2],Du Jinzhengnan[1],Bi Xinyu[1]

(1.School of Mathematical Sciences,Qufu Normal University,Qufu 273165,China)
(2.School of Mathematics and Quantitative Economics,Shandong University of Finance and Economics,Jinan 250014,China)

**Abstract**:Let $A(n)$ denote the largest absolute value of the coefficients of the $n$-th cyclotomic polynomial $\Phi_n(x)$. In this paper, for odd primes $5<q<r$ with $r\equiv \pm 3(\bmod 5q)$,we show that $2\leqslant A(5qr)\leqslant 3$.

**Key words**:cyclotomic polynomial,ternary cyclotomic polynomial,the height of cyclotomic polynomial

$n$ 次分圆多项式 $\Phi_n(x)$ 是以所有的 $n$ 次本原单位根为单零点的首一整系数多项式,令符号 $a(n,j)$ 表示 $\Phi_n(x)$ 中 $x^j$ 的系数,即

$$\Phi_n(x)=\prod_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\(k,n)=1}}(x-e^{\frac{2\pi ik}{n}})=\sum_{j=0}^{\varphi(n)}a(n,j)x^j,$$

其中 $\varphi$ 为欧拉函数. 利用数学归纳法可证 $\Phi_n(x)$ 为有理数域上的不可约多项式. 由于 $n$ 是满足 $\Phi_n(x)\mid x^n-1$ 的最小正整数,我们称 $\Phi_n(x)$ 为 $n$ 次分圆多项式.

令 $A(n)$ 表示分圆多项式 $\Phi_n(x)$ 所有系数绝对值的最大值,并称 $A(n)$ 为 $\Phi_n(x)$ 的高度. 如果 $A(n)=1$,那么我们称分圆多项式 $\Phi_n(x)$ 为平坦的. 为了研究 $A(n)$,根据分圆多项式的性质,我们只需考虑 $n$ 为无平方因子的奇素数的情形. 对于无平方因子的奇素数 $n$,我们称 $n$ 的互异素因子个数为分圆多项式 $\Phi_n(x)$ 的阶. 事实上,一阶和二阶分圆多项式都是平坦的. 很久之前,人们就已经发现并不是所有的分圆多项式都是平坦的,比如 $a(105,7)=-2$,因而三阶分圆多项式 $\Phi_{105}(x)$ 就是非平坦分圆多项式.

三阶分圆多项式中既有平坦的也有非平坦的,其系数性质相比一阶和二阶分圆多项式变得相对复杂起来,关于它的高度问题的研究是一项非常有意义的课题,但是完全决定三阶分圆多项式的高度具有很大的困难. 因此目前大多数相关方面的研究都是在某些特定条件之下进行的. 接下来我们考虑关于 $\Phi_{pqr}(x)$ 在如下情形方面的研究:设 $p<q<r$ 为奇素数且满足 $r\equiv \pm\omega(\bmod pq)$,其中 $\omega$ 为整数.

2007 年,Kaplan[1] 在条件 $r\equiv \pm 1(\bmod pq)$ 之下证明了如下结果:

$$A(pqr)=1.$$

2012 年,黄立君[2] 和 Elder[3] 独立地在条件 $r\equiv \pm 2(\bmod pq)$ 之下证明了如下结果:

**收稿日期**:2021-09-24.

**基金项目**:国家自然科学基金项目(11801303)、山东省自然科学基金项目(ZR2019QA016)、中国博士后科学基金面上一等资助项目(2018M640617).

**通讯作者**:张彬,博士,副教授,研究方向:代数数论. E-mail:zhangb2015@qfnu.edu.cn

$$A(pqr)=\begin{cases}1 & 若\ q\equiv 1(\bmod p),\\ 2 & 其他.\end{cases}$$

结合 Elder[3] 中的结果,我们可得

**命题 1**　设 $p<q<r$ 为满足 $p\equiv 1(\bmod 3)$,$q\equiv 1(\bmod 3p)$ 且 $r\equiv \pm 3(\bmod pq)$ 的奇素数,则 $A(pqr)=1$.

2017 年,作者在文[4]中研究了满足条件 $r\equiv \pm 3(\bmod 5q)$ 的三阶分圆多项式的性质,首次在不固定素数 $p$ 的条件下,给出了一类无穷多的高度为 3 的三阶分圆多项式 $\Phi_{pqr}(x)$. 本文中,在 $p=5$ 且 $r\equiv \pm 3(\bmod 5q)$ 的条件下进一步讨论三阶分圆多项式的系数问题并证明如下结果:

**定理 1**　设 $5<q<r$ 为满足 $r\equiv \pm 3(\bmod 5q)$ 的素数,则 $2\leqslant A(5qr)\leqslant 3$.

# 1　引理

在本部分,我们给出证明定理 1 过程中需要的几个引理.

**引理 1**[1]　设 $p<q<r$ 为奇素数,则对于任意满足 $s>q$ 且 $s\equiv \pm r(\bmod pq)$ 的素数 $s$,我们有 $A(pqr)=A(pqs)$.

**引理 2**[3,5]　设 $p<q<r$ 为奇素数,$\omega$ 为满足 $r\equiv \omega(\bmod pq)$ 的整数,则 $A(pqr)\leqslant |\omega|$.

**引理 3**[1]　设 $p<q<r$ 为奇素数. 令 $n$ 为非负整数,$f(i)$ 为满足 $0\leqslant f(i)\leqslant pq-1$ 且

$$rf(i)+i\equiv n(\bmod pq),$$

的唯一整数. 我们有

(1)
$$\sum_{i=0}^{p-1} a(pq,f(i))=\sum_{i=0}^{p-1} a(pq,f(q+i)).$$

(2)设
$$a^*(pq,i)=\begin{cases}a(pq,i) & 若\ ri\leqslant n;\\ 0 & 其他.\end{cases}$$

则
$$a(pqr,n)=\sum_{i=0}^{p-1} a^*(pq,f(i))-\sum_{i=0}^{p-1} a^*(pq,f(q+i)).$$

引理 3 是一个十分重要的结果. 它把三阶分圆多项式的系数的计算问题转化为二阶分圆多项式的系数计算问题. 目前二阶分圆多项式已经被国内外学者广泛研究,给出了相关的比较完整的结果. 特别地,关于其系数的取值问题,我们有如下的结果:

**引理 4**[6]　设 $p<q$ 为奇素数. 令 $s$ 和 $t$ 为满足如下条件的正整数:

$$pq+1=ps+qt.$$

则
$$a(pq,j)=\begin{cases}1 & 若\ j=up+vq\ 且\ 0\leqslant u\leqslant s-1, 0\leqslant v\leqslant t-1;\\ -1 & 若\ j=up+vq+1\ 且\ 0\leqslant u\leqslant q-s-1, 0\leqslant v\leqslant p-t-1;\\ 0 & 其他.\end{cases}$$

# 2　定理 1 的证明

利用引理 1 可知,为了证明在

$$r\equiv \pm 3(\bmod 5q)$$

条件下有 $2\leqslant A(5qr)\leqslant 3$,我们只需要考虑情形:

$$r\equiv 3(\bmod 5q).$$

一方面,在引理 2 中取 $\omega=3$,可得 $A(5qr)\leqslant 3$.

另一方面,为了证明 $A(5qr)\geqslant 2$,根据函数 $A(n)$ 的定义,我们只需要在分圆多项式 $\Phi_{5qr}(x)$ 中找到一个大于 1 或者小于 $-1$ 的系数. 为实现这个目的,我们将利用引理 3 来证明如下命题:

**命题 2**　设 $5<q<r$ 为满足 $r\equiv 3(\bmod 5q)$ 的素数.

(1)若 $q\equiv 1(\bmod 15)$,则 $a\left(5qr,\dfrac{4qr+2r}{3}+q\right)=2$;

(2)若 $q\equiv 2(\bmod 15)$,则 $a(5qr,qr+3)=2$;

(3)若 $q\equiv 4(\bmod 15)$,则 $a\left(5qr,\dfrac{qr-r}{3}+2\right)=-2$;

(4)若 $q\equiv 7(\bmod 15)$,则 $a\left(5qr,\dfrac{qr-r}{3}+2\right)=-2$;

(5)若 $q\equiv 8(\bmod 15)$,则 $a\left(5qr,\dfrac{qr+7r}{3}\right)=2$;

(6)若 $q\equiv 11(\bmod 15)$,则 $a\left(5qr,\dfrac{qr+4r}{3}+3\right)=2$;

(7)若 $q\equiv 13(\bmod 15)$,则 $a\left(5qr,\dfrac{qr+17r}{3}+3\right)=2$;

(8)若 $q\equiv 14(\bmod 15)$,则 $a\left(5qr,\dfrac{qr+16r}{3}+4\right)=2$.

**证明**　(1)设 $n=\dfrac{4qr+2r}{3}+q$. 将 $n$ 的值代入同余式 $rf(i)+i\equiv n(\bmod 5q)$ 并结合条件 $0\leqslant f(i)\leqslant 5q-1$ 可得 $f(0)=\dfrac{10q+2}{3}$, $f(1)=\dfrac{5q+1}{3}$, $f(2)=0$, $f(3)=\dfrac{10q-1}{3}$, $f(4)=\dfrac{5q-4}{3}$, $f(q)=\dfrac{4q+2}{3}$, $f(q+1)=\dfrac{14q+1}{3}$, $f(q+2)=3q$, $f(q+3)=\dfrac{4q-1}{3}$, $f(q+4)=\dfrac{14q-2}{3}$.

因此当 $k\in\{0,1,3,4,q+1,q+2,q+4\}$ 时,有 $rf(k)>n$;当 $k\in\{2,q,q+3\}$ 时,有 $rf(k)\leqslant n$. 故

$$a^{*}(5q,f(i))=\begin{cases}a(5q,f(i)) & 若\ k\in\{2,q,q+3\};\\ 0 & 若\ k\in\{0,1,3,4,q+1,q+2,q+4\}.\end{cases}$$

那么借助引理 3 得

$$a(5qr)=a(5q,f(2))-a(5q,f(q))-a(5q,f(q+3)).$$

特别地,注意到 $f(2)=0$, $f(q)=\dfrac{q-1}{15}\cdot 5+q+1$.因而由引理 4 可推知 $a(5q,f(2))=1$,$a(5q,f(q))=-1$. 代入上式可得

$$a(5qr)=2-a(5q,f(q+3)).$$

再次利用引理 4 可知 $a(5q,f(q+3))$ 的取值只可能为 $-1$,0 或者 1. 注意到此时 $q\equiv 1(\bmod 5)$,结合等式 $5q+1=5s+qt$ 可得 $s=\dfrac{4q+1}{5}$ 和 $t=1$. 若 $a(5q,f(q+3))=1$,则必有

$$f(q+3)=5u,$$

其中 $0\leqslant u\leqslant\dfrac{4q-4}{5}$. 代入 $f(q+3)$ 的值可得 $15u=4q-1$,此与条件 $q\equiv 1(\bmod 15)$ 矛盾. 故 $a(5q,f(q+3))\neq 1$.

若 $a(5q,f(q+3))=-1$,则必有

$$f(q+3)=5u+vq+1,$$

其中 $0\leqslant u\leqslant\dfrac{q-6}{5}$ 且 $0\leqslant v\leqslant 3$. 由 $0<f(q+3)<2q$ 得 $v=0$ 或者 1. 当 $v=0$ 时,可得 $u=\dfrac{4q-4}{15}$,此与 $0\leqslant u\leqslant\dfrac{q-6}{5}$ 矛盾;当 $v=1$ 时,可得 $15u=3q-4$,此与条件 $q\equiv 1(\bmod 15)$ 矛盾. 故 $a(5q,f(q+3))\neq -1$. 从而 $a(5q,f(q+3))=0$,故 $a(5qr,n)=2$.

(2)设 $n=qr+3$. 利用同余式 $rf(i)+i\equiv n(\bmod 5q)$ 并结合条件 $0\leqslant f(i)\leqslant 5q-1$ 可得 $f(0)=q+1$, $f(1)=\dfrac{13q+2}{3}$, $f(2)=\dfrac{8q+1}{3}$, $f(3)=q$, $f(4)=\dfrac{13q-1}{3}$, $f(q)=4q+1$, $f(q+1)=\dfrac{2q+2}{3}$, $f(q+2)=\dfrac{7q+1}{3}$, $f(q+3)=4q$, $f(q+4)=\dfrac{2q-1}{3}$.由此得当 $k\in\{0,1,2,4,q,q+2,q+3\}$ 时,有 $rf(k)>n$;当 $k\in\{3,q+1,q+4\}$ 时,有 $rf(k)\leqslant n$.

那么借助引理 3 得

$$a(5qr)=a(5q,f(3))-a(5q,f(q+1))-a(5q,f(q+4)).$$

注意到 $f(3)=q$ 且 $f(q+4)=\dfrac{2q-4}{15}\cdot 5+1$.因而由引理 4 可推知 $a(5q,f(3))=1$,$a(5q,f(q+4))=-1$.

代入上式可得

$$a(5qr)=2-a(5q,f(q+1)).$$

若 $a(5q,f(q+3))=1$,则必有

$$f(q+1)=5u+vq.$$

由 $0<f(q+3)<q$ 得 $v=0$,进而有 $2q+2=15u$,此与条件 $q\equiv 2(\bmod 15)$ 矛盾. 故 $a(5q,f(q+3))\neq 1$. 若 $a(5q,f(q+3))=-1$,则必有 $f(q+3)=5u+vq+1$. 由 $0<f(q+3)<q$ 得 $v=0$. 从而 $15u=2q-2$,此也与条件 $q\equiv 2(\bmod 15)$矛盾. 所以 $a(5q,f(q+3))=0$,故 $a(5qr,n)=2$.

(3)设 $n=\frac{qr-r}{3}+2$. 借助引理 3 中同余式并结合条件 $0\leqslant f(i)\leqslant 5q-1$ 可得 $f(0)=\frac{11q+1}{3}$, $f(1)=2q$, $f(2)=\frac{q-1}{3}$, $f(3)=\frac{11q-1}{3}$, $f(4)=2q-1$; $f(q)=\frac{5q+1}{3}$, $f(q+1)=0$, $f(q+2)=\frac{10q-1}{3}$, $f(q+3)=\frac{5q-2}{3}$, $f(q+4)=5q-1$.

故当 $k\in\{0,1,3,4,q,q+2,q+3,q+4\}$ 时,有 $rf(k)>n$;当 $k\in\{2,q+1\}$ 时,有 $rf(k)\leqslant n$.

借助引理 3 得

$$a(5qr)=a(5q,f(2))-a(5q,f(q+1)).$$

因为 $f(2)=\frac{q-4}{15}\cdot 5+1$, $f(q+1)=0$,所以由引理 4 可推知 $a(5q,f(2))=-1$, $a(5q,f(q+1))=1$. 代入上式可得 $a(5qr)=-2$.

(4)设 $n=\frac{qr-r}{3}+2$. 同理可得 $f(0)=2q$, $f(1)=\frac{q-1}{3}$, $f(2)=\frac{11q-2}{3}$, $f(3)=2q-1$, $f(4)=\frac{q-4}{3}$; $f(q)=0$, $f(q+1)=\frac{10q-1}{3}$, $f(q+2)=\frac{5q-2}{3}$, $f(q+3)=5q-1$, $f(q+4)=\frac{10q-4}{3}$. 由此即得当 $k\in\{0,1,2,4,q,q+2,q+3\}$ 时,有 $rf(k)>n$;当 $k\in\{1,4,q\}$ 时,有 $rf(k)\leqslant n$.

那么借助引理 3 得

$$a(5qr)=a(5q,f(1))+a(5q,f(4))-a(5q,f(q)).$$

注意到 $f(4)=\frac{q-7}{15}\cdot 5+1$, $f(q)=0$. 因而由引理 4 可推知 $a(5q,f(4))=-1$, $a(5q,f(q))=1$. 代入上式可得

$$a(5qr)=-2+a(5q,f(1)).$$

由条件 $q\equiv 7(\bmod 15)$ 可知 $f(1)=\frac{q-1}{3}$不可表为 $5u$ 或者 $5u+1$ 的形式,所以 $a(5q,f(1))\neq\pm 1$. 进而 $a(5q,f(1))=0$,由此即知 $a(5qr,n)=-2$.

(5)设 $n=\frac{qr-r}{3}$. 借助引理 3 可得 $f(0)=\frac{q+7}{3}$, $f(1)=2q+2$, $f(2)=\frac{11q+5}{3}$, $f(3)=\frac{q+4}{3}$, $f(4)=2q+1$; $f(q)=\frac{10q+7}{3}$, $f(q+1)=2$, $f(q+2)=\frac{5q+5}{3}$, $f(q+3)=\frac{10q+4}{3}$, $f(q+4)=1$. 故

$$a^*(5q,f(i))=\begin{cases}a(5q,f(i)) & 若\ k\in\{0,3,q+1,q+4\};\\ 0 & 若\ k\in\{1,2,4,q,q+2,q+3\}.\end{cases}$$

借助引理 3 得

$$a(5qr)=a(5q,f(0))+a(5q,f(3))-a(5q,f(q+1))-a(5q,f(q+4)).$$

由于 $f(0)=\frac{q+7}{15}$, $f(q+4)=1$,因而由引理 4 可推知 $a(5q,f(0))=1$, $a(5q,f(q+4))=-1$. 代入上式可得

$$a(5qr)=2+a(5q,f(3))-a(5q,f(q+1)).$$

由条件 $q\equiv 8(\bmod 15)$ 可知 $f(3)=\frac{q-1}{3}$ 不可表为 $5u$ 或者 $5u+1$ 的形式,所以 $a(5q,f(3))\neq\pm 1$. 进而 $a(5q,f(1))=0$;同理可知 $a(5q,f(q+1))=0$. 因此 $a(5qr,n)=2$.

(6)设 $n=\frac{qr+4r}{3}+3$. 仿上可得 $f(0)=\frac{q+7}{3}$, $f(1)=2q+2$, $f(2)=\frac{11q+5}{3}$, $f(3)=\frac{q+4}{3}$, $f(4)=2q+1$; $f(q)=\frac{10q+7}{3}$, $f(q+1)=2$, $f(q+2)=\frac{5q+5}{3}$, $f(q+3)=\frac{10q+4}{3}$, $f(q+4)=1$. 故

$$a^{*}(5q,f(i))=\begin{cases}a(5q,f(i)) & 若\ k\in\{3,q+1,q+4\};\\ 0 & 若\ k\in\{0,1,2,4,q,q+2,q+3\}.\end{cases}$$

借助引理3得

$$a(5qr)=a(5q,f(3))-a(5q,f(q+1))-a(5q,f(q+4)).$$

由于 $f(3)=\frac{q+4}{15}\cdot 5$, $f(q+1)=2$, $f(q+4)=1$,因而由引理4可推知 $a(5q,f(3))=1$, $a(5q,f(q+1))=0$, $a(5q,f(q+4))=-1$. 代入上式可得 $a(5qr,n)=2$.

(7)设 $n=\frac{qr+17r}{3}+3$. 仿上可得 $f(0)=\frac{q+20}{3}$, $f(1)=\frac{11q+19}{3}$, $f(2)=2q+6$, $f(3)=\frac{q+17}{3}$, $f(4)=\frac{11q+16}{3}$; $f(q)=\frac{10q+20}{3}$, $f(q+1)=\frac{5q+19}{3}$, $f(q+2)=6$, $f(q+3)=\frac{10q+17}{3}$, $f(q+4)=\frac{5q+16}{3}$. 因此有

$$a^{*}(5q,f(i))=\begin{cases}a(5q,f(i)) & 若\ k\in\{3,q+2\};\\ 0 & 若\ k\in\{0,1,2,4,q,q+1,q+3,q+4\}.\end{cases}$$

借助引理3得

$$a(5qr)=a(5q,f(3))-a(5q,f(q+2)).$$

由于 $f(3)=\frac{q+17}{15}\cdot 5$ 和 $f(q+2)=5+1$,利用引理4可推知 $a(5q,f(3))=1$, $a(5q,f(q+2))=-1$,因而 $a(5qr,n)=2$.

(8)设 $n=\frac{qr+16r}{3}+4$. 仿上可得 $f(0)=\frac{11q+20}{3}$, $f(1)=\frac{q+19}{3}$, $f(2)=2q+6$, $f(3)=\frac{11q+17}{3}$, $f(4)=\frac{q+16}{3}$; $f(q)=\frac{5q+20}{3}$, $f(q+1)=\frac{5q+19}{3}$, $f(q+2)=6$, $f(q+3)=\frac{5q+17}{3}$, $f(q+4)=\frac{10q+16}{3}$. 因此有

$$a^{*}(5q,f(i))=\begin{cases}a(5q,f(i)) & 若\ k\in\{4,q+2\};\\ 0 & 若\ k\in\{0,1,2,3,q,q+1,q+3,q+4\}.\end{cases}$$

借助引理3得

$$a(5qr)=a(5q,f(4))-a(5q,f(q+2)).$$

因为 $f(4)=\frac{q+16}{15}\cdot 5$ 和 $f(q+2)=5+1$,所以利用引理4可得 $a(5q,f(3))=1$, $a(5q,f(q+2))=-1$. 从而得到 $a(5qr,n)=2$.

这样便完成了命题2的证明,从而定理1成立.

**致谢**:本文作者诚挚地感谢纪春岗教授的指导!并对审稿专家的建议致以衷心的谢意!

## [参考文献]

[1] KAPLAN N. Flat cyclotomic polynomials of order three[J]. Journal of number theory,2007,127:118-126.
[2] 黄立君. 三阶分圆多项式的系数[D]. 南京:南京师范大学,2012.
[3] ELDER S. Flat cyclotomic polynomials:a new approach[J]. arXiv:1207.5811,2012.
[4] ZHANG B. The height of a class of ternary cyclotomic polynomials[J]. Bulletin of the Korean Mathematic Society,2017,54:43-50.
[5] ZHAO J,ZHANG X K. Coefficients of ternary cyclotomic polynomials[J]. Journal of number theory,2010,130:2223-2237.
[6] LAM T Y,LEUNG K H. On the cyclotomic polynomial $\Phi_{pq}(X)$[J]. American mathematical monthly,1996,103:562-564.

[责任编辑:陆炳新]