doi:10.3969/j.issn.1001-4616.2022.03.002

随机需求下考虑缺货损失变动的最优订购与定价决策

肖玉徽[1],楼振凯[2],戴晓震[3]

(1.海口经济学院聚星数字经济学院,海南 海口 571127)
(2.北京理工大学管理与经济学院,北京 100081)
(3.温州商学院管理学院,浙江 温州 325035)

[摘要]　研究了需求关于销售价格线性敏感且随机的零售商最优订购与定价问题. 考虑到不同销售价格下单位商品的缺货损失对零售商来说是不同的,给出了机会缺货损失的概念. 接着建立了随机需求下的平衡机会损失与实际利润的最优订购与定价模型,得到了最大化净收益目标下进货量与销售价格的函数关系,并利用该函数将原模型转化为只含一个决策变量的模型. 通过极值存在性的分析给出了零售商最大期望利润为正的必要条件,并进一步给出了需求随机项的概率密度函数可导时利润函数极大值存在的充分条件. 通过所能获得的最大利润,可分析零售商是否值得进行此次的订购与销售. 最后给出一个算例,对文中所获得的结论做一些补充.

[关键词]　随机需求,订购与定价,机会损失,极值存在性
[中图分类号]F224;F274　[文献标志码]A　[文章编号]1001-4616(2022)03-0009-06

Optimal Ordering and Pricing Decisions of a Retailer Under Stochastic Demand with Considering Variable Stockout Cost

Xiao Yuhui[1],Lou Zhenkai[2],Dai Xiaozhen[3]

(1.Gathering Stars Digital Econormic College,Haikou University of Economics,Haikou 571127,China)
(2.School of Management and Economics,Beijing Institute of Technology,Beijing 100081,China)
(3.School of Management,Wenzhou Business College,Wenzhou 325035,China)

Abstract:This paper studies optimal ordering and pricing issues of a retailer who faces price-linear-sensitive and stochastic demand. By considering variable stockout cost of one item under different retail price,the conception of variable opportunity loss is proposed. Then an ordering and pricing model is constucted under stochastic demand for the purpose of trading off opportunity loss and overordering cost. It is shown that the ordering quantity and the retail price of the retailer meet a unique relation formula,by which the previous model is transformed to another model which only involves one decision variable. By analyzing the existence of the extremum value of the profit function,a necessary condition in which the retailer's profit is positive is presented. Further,a sufficient condition in which the maximal value of the profit function exists is obtained under the assumption that the probability density function of the stochastic item of demand is differentiable. By analyzing the maximal profit,the retailer is able to draw the conclusion for whether or not to order and sales. Finally,a numerical illustration is presented to make some supplements.

Key words:tochastic demand,ordering and pricing,opportunity loss,existence of the extremum value

关于订购与定价问题的研究由来已久,其中影响决策的一个关键性因素是顾客需求量的表达. 一般来说,需求与时间和价格相关,其中需求与时间的关系主要有线性、二次型、指数型和斜坡型[1],而需求与价格的关系常被表达为线性函数[2]. 除了季节性商品外,需求与未来时间的关系往往无法较准确地表达,因此已有文献更多地关注需求与价格之间的关系.

收稿日期:2021-03-17.
基金项目:国家自然科学基金面上项目(71571019)、海南省哲学社会科学规划课题(HNSK(YB)21-11).
通讯作者:楼振凯,博士研究生,研究方向:决策理论与应用. E-mail:louzk@ahut.edu.cn

当需求关于价格确定性表达时,缺货一般不会发生,此时单纯考虑收益最大化目标下的最优订购与定价缺乏理论深度与应用价值,研究往往结合实际问题通过增加约束条件,改变目标等进行,如根据商品的可替代性和价格敏感性进行差异化定价[3],考虑多阶段补货以降低库存成本[4],具有价格调整成本的多阶段订购与动态定价[5]等. 当需求的概率分布未知时,虽然建立了自适应定价策略和建立在该定价水平上的基于乘法更新的随机订货决策[6],然而该策略的理论意义大于其应用价值.

概率分布已知的随机需求下的零售商最优订购与定价问题,其基本设定是一个零售商面对价格敏感且随机的需求同时确定订购量和销售价格以最大化期望收益[7]. 近些年来,对该问题的研究取得了许多有意义的成果. 冯颖等[8]设定需求率为价格的线性函数乘以随机项,在此基础上研究了易变质产品的订购与定价决策问题. Yang 等[9]对最大化期望利润和期望收益双目标下的订购和定价问题进行了深入探讨,给出了最优订购量和定价的唯一表达. 刘树人等[10]考虑了拍卖式采购下的零售商订购与定价问题,涉及供应商之间的竞争博弈,以及零售商权衡采购与需求的决策. Zhang 等[11]综合考虑了订购成本、运输成本、税率和缺货损失等因素,对全球供应链管理中具有随机需求的定价与订购问题进行了详细研究. 最近,张爱凤等[12]和 Modak 等[13]将随机需求应用到双渠道定价问题中,探究了需求分布对渠道利润以及供应商决策的影响. 曹裕等[14]研究零售商促销努力下存在随机需求的非瞬时变质产品批量订货定价策略,并给出了求解零售商最优补货周期和局部最优定价策略的算法.

在随机需求模型中,缺货损失对决策变量的确定起着关键性影响[15]. Shi 等[16-17]关于随机需求的订购与定价的已有文献中,大多将单位缺货损失设定为常数,此时缺货损失仅与缺货数量相关. 然而,另外一些学者认为缺货损失与当前销售价格有关,如 Schweitzer 等[18]和 Xu 等[19],本文采纳他们的设定,即认为缺货损失是一种机会成本,与销售价格和期望缺货数量有关. 降低销售价格虽然能提高销量,减少单位缺货损失,但是单位商品的利润也随之降低. 因此,研究销售价格与销量之间的关系,以及寻找平衡机会缺货损失与实际损失的最优销售价格,具有理论意义与应用价值. 类似周品等[20]的考虑,本文深入探讨了在随机需求下价格和产量之间的关系. 另外,还给出销售周期结束未售完产品剩余价值的概念来表达过度订购的损失,并认为该价值低于商品的进价,类似于传统报童模型中的设定.

1　符号描述与假设

本文考虑在一个有限销售周期内,零售商销售单一品种商品. 为了建立模型进行讨论,给出相关符号定义:

(1)p 为销售价格,在销售周期开始前一旦确定,期间不发生改变. 销售周期开始前的订购数量为 q.

(2)a 为销售期内市场潜在需求量(a 为大于零的常数),λ 为期望需求量关于价格的敏感系数.

(3)ε 是期望需求量的随机项,在区间$[-u,v]$上变动,其中 $u,v>0$. $f(\varepsilon)$和 $F(\varepsilon)$分别为 ε 的概率密度函数和概率分布函数,本文认为密度函数 $f(\varepsilon)$在区间$[-u,v]$内连续且恒正.

(4)$D(p)$为价格 p 时整个销售期的期望需求量,$D(p)=a-\lambda p+\varepsilon$.

(5)单位产品的批发价为 $c(c>0)$,销售周期结束未售完的产品剩余价值为 $d(0\leqslant d<c)$.

(6)对零售商来说,当销售价为 p 时,单位商品缺货的机会损失为 $p-c$. 虽然机会损失并不是实际损失,但却影响零售商的决策,当销售价设定较高时,零售商将尽可能减少缺货数量以降低机会损失的总额. 事实上,在预售产品的多阶段定价中,机会损失将更显著地影响决策.

为了方便讨论,作出几点假设和说明:

(1)本文只考虑一次订购且订购成本为一常数,不影响决策变量的确定,因此模型中不加入订购成本这一参数.

(2)本文不考虑每次订购到商品到货这段时间,即假定订购提前期为零,因此开始订购的时点也就是再次持有库存进行销售的时点.

接下来讨论零售商销售价格的取值范围. 零售商的定价显然不能低于批发价 c,要不然就没有订购与销售的必要. 再考虑到期望需求量的变化区间,得到零售价的取值范围为

$$c\leqslant p\leqslant\frac{a+v}{\lambda}.$$

考虑零售商订货量的取值范围,该范围与销售价格相关. 分析期望需求量函数可知,对任意的产量 $q<a-\lambda p-u$,此时不存在过度订购损失,然而缺货损失必然大于产量为 $a-\lambda p-u$ 时的缺货损失. 同样地,对任意的产量 $q>a-\lambda p+v$,此时不存在缺货损失,然而过度订购损失必然大于产量为 $a-\lambda p+v$ 时的过度订购损失,因此零售商合理产量 q 的取值范围为

$$a-\lambda p-u\leqslant q\leqslant a-\lambda p+v.$$

2 模型与求解分析

零售商定价较高时将导致期望需求量减少,单位商品的缺货损失较高. 而销售价格定得较低时,虽然增加了期望需求量,减少了单位缺货成本,却使得单位商品的利润减少. 因此,平衡机会损失,期望需求量和利润之间的关系,找到最优的销售价和订购量,对零售商来说十分重要.

在一次订购的前提下,零售商以期望净收益最大化为目标,确定最优产量及最优定价的模型如下;

$$\max Z=\int_{-u}^{q-(a-\lambda p)}\{(p-c)D_p-(c-d)[q-(a-\lambda p)-\varepsilon]\}f(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon+$$
$$\int_{q-(a-\lambda p)}^{v}\{(p-c)q-(p-c)[\varepsilon-q+(a-\lambda p)]\}f(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon,$$
$$\text{s.t. } c\leqslant p\leqslant\frac{a+v}{\lambda},$$
$$a-\lambda p-u\leqslant q\leqslant a-\lambda p+v. \tag{1}$$

在考虑约束(即假设模型有解)的情况下,对模型(1)中目标函数进行分析. 利用 $D(p)$ 的表达式和分布函数 $F(\varepsilon)$ 将模型(1)中目标函数转化为

$$\max Z=[(p-d)(a-\lambda p)-(c-d)q]F(q-(a-\lambda p))+(p-d)\int_{-u}^{q-(a-\lambda p)}\varepsilon f(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon+$$
$$(p-c)(2q-a+\lambda p)[1-F(q-(a-\lambda p))]-(p-c)\int_{q-(a-\lambda p)}^{v}\varepsilon f(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon. \tag{2}$$

为了探索订购量和销售价格的关系,给出变量代换 $x=q-(a-\lambda p)$,x 可以看作 q 的函数,此时 p 当作常数. 从而目标式(2)可进一步改写为

$$\max Z=[(p-d)(a-\lambda p)-(c-d)(a-\lambda p+x)]F(x)+(p-d)\int_{-u}^{x}\varepsilon f(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon+$$
$$(p-c)(a-\lambda p+2x)[1-F(x)]-(p-c)\int_{x}^{v}\varepsilon f(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon. \tag{3}$$

对目标式(3)中函数 Z 关于 x 求导得到

$$\frac{\partial Z}{\partial x}=-(c-d)F(x)+[(p-d)(a-\lambda p)-(c-d)(a-\lambda p+x)]f(x)+(p-d)xf(x)+$$
$$2(p-c)[1-F(x)]-(p-c)(a-\lambda p+2x)f(x)+(p-c)xf(x).$$

合并同类项并令导数为零得到

$$\frac{\partial Z}{\partial x}=(c+d-2p)F(x)+2(p-c)=0. \tag{4}$$

对于方程(4),有如下结论:

定理 1 对任意满足模型(1)中约束条件的 p,方程(4)有且仅有唯一解.

证明 在方程(4)中,由 $d<c\leqslant p$ 得到

$$c+d-2p<2c-2p<0.$$

因此方程(4)可改写为

$$F(x)=\frac{2(p-c)}{2p-c-d}, \tag{5}$$

继而有

$$\frac{2(p-c)}{2p-c-d}<\frac{2(p-c)}{2p-2c}=1.$$

又由于 $x\in[-u,v]$,因此由密度函数 $f(\varepsilon)>0$ 恒成立的假设可知 $f(x)>0$,从而 $F(x)$ 连续且严格递增. 再根据连续函数介值定理可知,方程(5)有且仅有一个解.

事实上,方程(4)具有唯一解,意味着对于任意一个价格 p,都存在唯一的订购量 q.

记方程(5)的解为 x^*,对 Z 求二阶导数得到

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}=(c+d-2p)f(x)<0,$$

即 $x=x^*$ 时 Z 取得唯一极大值,对于只有唯一极值点的连续函数 Z 来说其极大值即为最大值. 也就是说,要最大化期望净收益,零售商的产量和定价要满足下列关系:

$$q-(a-\lambda p)=x^*. \tag{6}$$

由定理 1 可知,x^* 是 p 的一个映射,再由表达式(6)可知,q 是 p 的函数. 记 $q=q(p)$,将 x^* 的表达式(6)代入方程(5)中,根据隐函数求导法两边对 p 求导,得到:

$$(q'(p)+\lambda)f(q-a+\lambda p)=\frac{2c-2d}{(2p-c-d)^2}.$$

由于 $f(x^*)>0$,从而有

$$q'(p)=\frac{2c-2d}{(2p-c-d)^2 f(q-a+\lambda p)}-\lambda. \tag{7}$$

另外,由于 $F(x)$ 为单调递增函数,因此其反函数存在,根据方程(5)得到 x^* 的表达式:

$$x^*=F^{-1}\left(\frac{2p-2c}{2p-c-d}\right). \tag{8}$$

当 x^* 的表达式为显性时,将简化表达形式和求解过程,接下来的讨论以及算例中将说明这一点.

由于 $x^*\in[-u,v]$,因此此时 q 必然满足模型(1)中关于 q 的约束. 进一步地,将 x^* 的表达式(6)代入目标式(3)中,合并同类项,并加入约束条件,模型(1)转化为如下只含一个变量 p 的模型:

$$\begin{aligned}\max Z=&(q(p)-a+\lambda p)(c+d-2p)F(q(p)-a+\lambda p)+(p-d)\int_{-u}^{q(p)-a+\lambda p}\varepsilon f(\varepsilon)\,\mathrm{d}\varepsilon-\\&(p-c)\int_{q(p)-a+\lambda p}^{v}\varepsilon f(\varepsilon)\,\mathrm{d}\varepsilon+(p-c)(2q(p)-a+\lambda p).\\&\text{s.t. } c\leqslant p\leqslant\frac{a+v}{\lambda}.\end{aligned} \tag{9}$$

分析模型(9)的解. 容易判断,上述模型中关于 p 的函数 Z 可导. 当 $p=c$ 时售价和进价的差价为零,当 $p=(a+v)/\lambda$ 时,期望需求为零,这两种情况下零售商无法获得正的净收益. 因此,只有当模型的最优解位于约束条件的区间内时,零售商的净收益才可能为正数. 对于闭区间可导函数来说,若最大值位于区间内,则该最值同时也是极大值.

因此,我们得到如下结论:

命题 1　零售商最大期望利润为正的必要条件为下列方程有解:

$$\begin{aligned}\frac{\partial Z}{\partial p}=&[(q'(p)+\lambda)(c+d-2p)-2(q(p)-a+\lambda p)]F(q(p)-a+\lambda p)+(2q(p)-a+\lambda p)+\\&(2q'(p)+\lambda)(p-c)+\int_{-u}^{q(p)-a+\lambda p}\varepsilon f(\varepsilon)\,\mathrm{d}\varepsilon-\int_{q(p)-a+\lambda p}^{v}\varepsilon f(\varepsilon)\,\mathrm{d}\varepsilon=0,\end{aligned} \tag{10}$$

式中,q 关于 p 的一阶导数由表达式(7)给出.

进一步分析方程(10)的解是否一定存在. 事实上,当 u 和 v 的值很大(接近 a)且 ε 的分布集中在两端时,不管销售价定为何值,总会产生很大的缺货损失或过度订购损失,此时方程(10)的解不一定存在. 在这种情况下,零售商没有进行订购和销售的必要.

当方程(10)有解时,代入模型(9)的目标函数中,使其最大者即为最优定价,再根据方程

$$F(q-a+\lambda p)=\frac{2(p-c)}{2p-c-d}$$

得到最优订购量 q.

方程(10)的解只是 Z 的极值点,因此所得到的也可能包括极小值点. 当 $f(\varepsilon)$ 可导时,进一步考虑获得极大值点的充分条件. 根据表达式(7)再次求导得到 $q(p)$ 关于 p 的二阶导数:

$$q''(p)=\frac{(2d-2c)\left[4f(q-a+\lambda p)+(2p-c-d)(q'(p)+\lambda)f'(q-a+\lambda p)\right]}{(2p-c-d)^3 f^2(q-a+\lambda p)}. \tag{11}$$

同样地,将 Z 对 p 求二阶导数得到

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial p^2}=\left[(c+d-2p)q''(p)-4(q'(p)+\lambda)\right]F(q(p)-a+\lambda p)+4q'(p)+2\lambda+$$
$$2(p-c)q''(p)+(q'(p)+\lambda)^2(c+d-2p)f(q(p)-a+\lambda p), \tag{12}$$

式中,$q(p)$ 关于 p 的二阶导数由表达式(11)给出. 当方程(10)的解使 Z 关于 p 的二阶导数(12)为正数时,Z 取得极小值.

进一步地,当方程(10)具有唯一解且使得表达式(12)为正时,此时意味着零售商具有唯一的最优定价和订购量决策.

3 算例分析

本节给出一个算例,考虑如下参数:市场潜在需求 $a=2\ 000$,商品单位批发价 $c=20$,销售周期结束单位商品剩余价值 $d=10$,价格敏感系数 $\lambda=20$,$[-u,v]=[-200,200]$. 另外,ε 的概率密度函数 $f(\varepsilon)=1/400$,对应的概率分布函数为:

$$F(\varepsilon)=\int_{-200}^{\varepsilon}\frac{1}{400}\mathrm{d}x=\frac{\varepsilon+200}{400}.$$

容易验证,上述参数设定满足前文中关于概率密度和产品剩余价值的假设.

令 $x=q-2\ 000+20p$,根据方程(15)有

$$\frac{\partial Z}{\partial x}=(30-2p)F(x)+2(p-20)=0.$$

解之得到

$$q-2\ 000+20p=x^*=\frac{400p-10\ 000}{2p-30}.$$

从而得到

$$q=\frac{-40p^2+5\ 000p-70\ 000}{2p-30}$$

和

$$q'(p)=\frac{-80p^2+2\ 400p-10\ 000}{(2p-30)^2}.$$

对应的方程(10)为

$$\frac{5\ 400p-40p^2-80\ 000}{2p-30}+\frac{4\ 000p^2-80p^3-50\ 000p+40\ 000}{(2p-30)^2}+\frac{160\ 000-8\ 000p}{(2p-30)^2}=\frac{1\ 600p^2-56\ 000p+480\ 000}{(2p-30)^2}.$$

解得模型唯一的可行解 $p=60$,$q=956$,结果已四舍五入处理.

检验所获得的解为 Z 的极大值. $q(p)$ 关于 p 的二阶导数为

$$q''(p)=\frac{-64\ 000p+960\ 000}{(2p-30)^4}.$$

再由表达式(12)得到 Z 关于 p 的二阶导数如下:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial p^2}=\frac{-320p^2+9\ 600p-40\ 000}{(2p-30)^2}+\frac{-128\ 000p^2+4\ 160\ 000p-33\ 600\ 000}{(2p-30)^4}+40.$$

将 $p=60$ 代入容易得到 Z 关于 p 的二阶导数小于零,即此时为 Z 的极大值. 对于具有唯一极值点的连续函数来说,极大值即为其最大值.

相应地,根据模型(1)中的目标式,得到零售商的期望收益为 $\max Z=30\ 222$. 也就是说,零售商能够通

过订购与定价决策获得利润.

4 结论

本文对需求关于价格线性敏感且随机的零售商最优订购与定价问题进行了深入探讨,根据差价给出了单位商品机会损失的概念,得到了最优订购量和最优价格的唯一关系式,并给出零售商可获得利润的必要条件,并进一步给出了需求随机项的概率密度函数可导时利润函数极大值存在的充分条件.

事实上,当随机需求下涉及动态定价或差异化定价时,考虑到机会损失,为了最大化期望收益,零售商倾向于使缺货发生在销售价格较低的阶段从而减少缺货损失.

[参考文献]

[1] PANDA S, SAHA S, BASU M. Optimal pricing and lot-sizing for perishable inventory with price and time dependent ramp-type demand[J]. International journal of systems science,2013,44(1):127-138.

[2] SAJADIEH M S, JOKAR M R A. Optimizing shipment, ordering and pricing policies in a two-stage supply chain with price-sensitive demand[J]. Transportation research part E,2009,45(4):564-571.

[3] TANG C S, YIN R. Joint ordering and pricing strategies for managing substitutable products[J]. Production and operations management,2007,16(1):138-153.

[4] CHANG H J, TENG J T, OUYANG L Y, et al. Retailer's optimal pricing and lot-sizing policies for deteriorating items with partial backlogging[J]. European journal of operational research,2006,168(1):51-64.

[5] CHEN X, HU P. Joint pricing and inventory management with deterministic demand and costly price adjust[J]. Operations research letters,2012,40(5):385-389.

[6] BURNETAS A N, SMITH C E. Adaptive ordering and pricing for perishable products[J]. Operations research,2000,48(3):436-443.

[7] PETRUZZI N C, DADA M. Pricing and the newsvendor problem: a review with extensions[J]. Operations research,1999,47(2):183-194.

[8] 冯颖,蔡小强,涂奉生,等. 随机需求情形下单一易变质产品库存模型的订购与定价策略[J]. 南开大学学报(自然科学版),2010,43(2):106-112.

[9] YANG S L, SHI C M, ZHAO X. Optimal ordering and pricing decisions for a target oriented newsvendor[J]. Omega,2011,39(1):110-115.

[10] 刘树人,王娜. 价格相依随机需求下的逆向拍卖采购与定价联合决策[J]. 管理工程学报,2014,28(2):196-200.

[11] ZHANG X B, HUANG S, WAN Z. Optimal pricing and ordering in global supply chain management with constraints under random demand[J]. Applied mathematical modelling,2016,40(23-24):10105-10130.

[12] 张爱凤,经有国. 独立随机需求下共享剩余库存的双渠道订货与定价模型[J]. 工业工程与管理,2019,24(1):45-53.

[13] MODAK N M, KELLE P. Managing a dual-channel supply chain under price and delivery-time dependent stochastic demand[J]. European journal of operational research,2019,272(1):147-161.

[14] 曹裕,李业梅,李青松. 基于提前支付的非瞬时变质产品批量订货定价策略[J]. 控制与决策,2018,33(2):301-308.

[15] WU J, LI J, WANG S Y, et al. Mean-variance analysis of the newsvendor model with stockout cost[J]. Omega,2009,37(3):724-730.

[16] SHI J M, ZHANG G Q. Multi-product budget-constrained acquisition and pricing with uncertain demand and supplier quantity discounts[J]. International journal of production economics,2010,128(1):322-331.

[17] SHI J M, ZHANG G Q, LAI K K. Optimal ordering and pricing policy with supplier quantity discounts and price-dependent stochastic demand[J]. Optimization,2012,61(2):151-162.

[18] SCHWEITZER M E, CACHON G P. Decision bias in the newsvendor problem with a known demand distribution: experimental evidence[J]. Management science,2000,46(3):404-420.

[19] XU X S, MENG Z Q, JI P. On the newsvendor model with conditional Value-at-Risk of opportunity loss[J]. International journal of production research,2016,54(8):2449-2458.

[20] 周品,徐和,陈鹏宇,等. 随机需求环境下联产品系统价格与产量决策研究[J]. 管理工程学报,2020,34(2):156-160.

[责任编辑:陆炳新]