doi:10.3969/j.issn.1001-4616.2022.04.002

一类带分布时滞的非线性中立型广义弹性杆方程的振动分析

罗李平

(衡阳师范学院数学与统计学院,湖南 衡阳 421002)

[**摘要**]　基于力学上非线性弹性杆(组)结构的振动问题与数学上偏微分方程(组)振动理论之间的密切联系,研究了一类带分布时滞的偶数阶非线性中立型广义弹性杆方程的振动性问题,建立了该类弹性杆方程在 Dirichlet 边值条件下所有解振动的新的充分性判据,并给出一个实例阐述结果的有效性. 所得结果反映出该类弹性杆结构在这种情况下的振动状态——它始终发生振动.

[**关键词**]　振动性,广义弹性杆方程,分布时滞,非线性中立型,偶数阶

[**中图分类号**]O175.29;O175.4　[**文献标志码**]A　[**文章编号**]1001-4616(2022)04-0010-06

Oscillatory Analysis for a Class of Nonlinear Neutral Generalized Elastic-Rod Equations with Distributed Delay

Luo Liping

(College of Mathematics and Statistics,Hengyang Normal University,Hengyang 421002,China)

Abstract:Based on the close relationship between the vibration problems of nonlinear elastic rod(systems)structure in mechanics and the oscillation theory of partial differential equation(systems)in mathematics,the oscillation problems for a class of even order nonlinear neutral generalized elastic-rod equations with distributed delays are investigated,and some new sufficient criteria for oscillation of all solutions of such elastic-rod equations are establish under Dirichlet's boundary value condition,which the effectiveness of the results is illustrated by an example. The obtained results reflect the oscillation state of such elastic-rod structure in the case that the oscillation kept happening.

Key words:oscillation,generalized elastic-rod equation,distributed delay,nonlinear neutral type,even order

在非线性振动力学上,弹性杆(组)结构是工程系统中最普通的构件之一,常出现在建筑、造船、航空航天、机械制造、海底电缆、石油钻探等众多工程场合. 全面了解弹性杆(组)结构的振动特性是对这类复杂结构进行优化设计及其振动控制的重要基础与前提,而弹性杆(组)在数学上都是通过偏微分方程(组)来描述的,因此,我们可以通过对偏微分方程(组)的振动问题进行准确的分析,从而分析出所对应的弹性杆(组)结构的振动状态,这对工程实践上的机械减振和降噪等实际应用具有一定的理论指导意义. 近年来,关于这一方面的研究已取得了一些很好的结果[1-9]. 本文拟研究如下一类具分布时滞的偶数阶非线性中立型广义弹性杆方程

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[r(t)\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\left(u+\int_{\alpha}^{\beta}p(t,\tau)u(x,t-\tau)\mathrm{d}\tau\right)\right]+q(x,t)u+\int_{c}^{d}f(x,t,u(x,t-\sigma))\mathrm{d}\sigma=$$
$$a_0(t)h_0(u)\Delta u+a_1(t)h_1(u(x,\rho(t)))\Delta u(x,\rho(t))\tag{1}$$

解的振动性,其中 $u=u(x,t)$,$(x,t)\in\Omega\times R_+\equiv G$,$n\geqslant2$ 是偶数,$\Omega\subset R^M$ 是有界域,$\partial\Omega$ 是逐片光滑,$R_+=[0,\infty)$,且 Δ 是 R^M 中的 M 维 Laplacian 算子.

收稿日期:2022-01-21.

基金项目:湖南省教育厅科研重点项目(21A0440)、湖南省自然科学基金项目(2022JJ90021)、衡阳师范学院学科专项项目(XKZX21002).

通讯作者:罗李平,教授,研究方向:(脉冲)偏微分方程振动理论研究. E-mail:stxyluolp@163.com

同时考虑 Dirichlet 边值条件:

$$u=0,\quad (x,t)\in\partial\Omega\times R_+. \tag{2}$$

本文我们总假定下列条件成立:

(H_1) $r(t)\in C^1(R_+,R_+)$ 且 $\int_{t_0}^{\infty}\frac{1}{r(t)}\mathrm{d}t=\infty$,$t_0>0,0<\alpha<\beta,0<c<d$;

(H_2) $p(t,\tau)\in C^n(R_+\times[\alpha,\beta],R_+)$, $\int_{\alpha}^{\beta}p(t,\tau)\mathrm{d}\tau<1$,$q(x,t)\in C(\bar{\Omega}\times R_+,R_+)$,$Q(t)=\min_{x\in\bar{\Omega}}\{q(x,t)\}$;

(H_3) $f\in C(\bar{\Omega}\times R_+\times R,R)$,当 $u\neq0$ 时,$\frac{f(x,t,u)}{u}\geqslant h(x,t)$,其中 $h\in C(\bar{\Omega}\times R_+,R_+)$,$H(t)=\min_{x\in\bar{\Omega}}\{h(x,t)\}$;

(H_4) $a_0(t),a_1(t)\in C(R_+,R_+)$,$\rho(t)\in C(R_+,R)$,$\rho(t)\leqslant t$,$\rho(t)$ 非减且 $\lim_{t\to\infty}\rho(t)=\infty$;

(H_5) $h_0(u),h_1(u)\in C^1(R,R)$,$uh_0'(u)\geqslant0$,$uh_1'(u)\geqslant0$,$h_0(0)=0$,$h_1(0)=0$.

定义 边值问题(1),(2)的解 $u(x,t)\in C^n(G)\cap C^1(\bar{G})$ 在 G 内称为振动的,若它具有任意大的零点,即 $\forall T>0$, $\exists(x_0,t_0)\in\Omega\times[T,\infty)$,使得等式 $u(x_0,t_0)=0$ 成立. 否则称 $u(x,t)$ 在 G 内是非振动的.

1 主要结果及其证明

定理 1 若

$$\int_{t_0}^{\infty}\left\{H(t)\int_c^d\left[1-\int_{\alpha}^{\beta}p(t-\sigma,\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\sigma\right\}\mathrm{d}t=\infty,\quad t_0>0, \tag{3}$$

则边值问题(1),(2)的所有解在 G 内振动.

证明 假设边值问题(1),(2)有一个非振动解 $u(x,t)$,不失一般性,不妨设 $u(x,t)>0$,$t\geqslant t_0$,t_0 为某一正常数(对于 $u(x,t)<0$ 的情形,令 $\bar{u}(x,t)=-u(x,t)$,可类似证明),则由(H_4)知,存在 $t_1\geqslant t_0$,使得对任意的$(x,t)\in\Omega\times[t_1,+\infty)$,有 $u(x,t)>0$,$u(x,t-\tau)>0$,$u(x,t-\sigma)>0$,$u(x,\rho(t))>0$.

方程(1)两边关于 x 在 Ω 上积分,可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[r(t)\frac{d^{n-1}}{\mathrm{d}t^{n-1}}\left(\int_{\Omega}u\mathrm{d}x+\int_{\alpha}^{\beta}p(t,\tau)\int_{\Omega}u(x,t-\tau)\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\right)\right]+\int_{\Omega}q(x,t)u\mathrm{d}x+\int_{\Omega}\left(\int_c^d f(x,t,u(x,t-\sigma))\mathrm{d}\sigma\right)\mathrm{d}x=$$

$$a_0(t)\int_{\Omega}h_0(u)\Delta u\mathrm{d}x+a_1(t)\int_{\Omega}h_1(x,\rho(t))\Delta u(x,\rho(t))\mathrm{d}x,\quad t\geqslant t_1. \tag{4}$$

由 Green 公式,边值条件(2)及(H_5)有

$$\int_{\Omega}h_0(u)\Delta u\mathrm{d}x=\int_{\partial\Omega}h_0(u)\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{N}}\mathrm{d}S-\int_{\Omega}h_0'(u)|\mathrm{grad}\ u|^2\mathrm{d}x=-\int_{\Omega}h_0'(u)|\mathrm{grad}\ u|^2\mathrm{d}x\leqslant0,\quad t\geqslant t_1, \tag{5}$$

$$\int_{\Omega}h_1(u(x,\rho(t)))\Delta u(x,\rho(t))\mathrm{d}x\leqslant0,\quad t\geqslant t_1, \tag{6}$$

式中,$\boldsymbol{N}$ 是$\partial\Omega$ 的单位外法向量,$\mathrm{d}S$ 是$\partial\Omega$ 上的面积元素.

又由(H_2),(H_3)有

$$\int_{\Omega}q(x,t)u\mathrm{d}x\geqslant Q(t)\int_{\Omega}u\mathrm{d}x,\quad t\geqslant t_1, \tag{7}$$

$$\int_{\Omega}\left(\int_c^d f(x,t,u(x,t-\sigma))\mathrm{d}\sigma\right)\mathrm{d}x\geqslant\int_{\Omega}\left(\int_c^d h(x,t)u(x,t-\sigma)\mathrm{d}\sigma\right)\mathrm{d}x\geqslant H(t)\int_c^d\left(\int_{\Omega}u(x,t-\sigma)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\sigma,\quad t\geqslant t_1. \tag{8}$$

令 $U(t)=\int_{\Omega}u\mathrm{d}x$,显然,$U(t)>0$,$t\geqslant t_1$. 于是由(4)-(8)可得

$$\left[r(t)\left(U(t)+\int_{\alpha}^{\beta}p(t,\tau)U(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right)^{(n-1)}\right]'+Q(t)U(t)+H(t)\int_c^d U(t-\sigma)\mathrm{d}\sigma\leqslant0,\quad t\geqslant t_1. \tag{9}$$

令 $Z(t)=U(t)+\int_{\alpha}^{\beta}p(t,\tau)U(t-\tau)\mathrm{d}\tau$,则易知 $Z(t)\geqslant U(t)>0$,$[r(t)Z^{(n-1)}(t)]'\leqslant0$,$t\geqslant t_1$,于是 $r(t)Z^{(n-1)}(t)$ 在$[t_1,+\infty)$上单调减少,从而可断言

$$r(t)Z^{(n-1)}(t)\geqslant0,\quad t\geqslant t_1. \tag{10}$$

事实上,若(10)不成立,则必存在 $T\geqslant t_1$,满足 $r(T)Z^{(n-1)}(T)<0$,所以当 $t\geqslant T$ 时,由 $r(t)Z^{(n-1)}(t)$ 单调减少知,$r(t)Z^{(n-1)}(t)\leqslant r(T)Z^{(n-1)}(T)$,从而有

$$Z^{(n-1)}(t)\leqslant\frac{1}{r(t)}r(T)Z^{(n-1)}(T),\quad t\geqslant T.$$

在$[T,t]$上对上式两边积分得

$$Z^{(n-2)}(t)\leqslant Z^{(n-2)}(T)+r(T)Z^{(n-1)}(T)\int_T^t\frac{1}{r(s)}\mathrm{d}s,\quad t\geqslant T.$$

在上式中,令 $t\to\infty$,得到 $\lim\limits_{t\to\infty}Z^{(n-2)}(t)=-\infty$,同理类推,可得

$$\lim_{t\to\infty}Z^{(k)}(t)=-\infty,k=0,1,2,\cdots,n-2,$$

但这与“$Z(t)>0$”矛盾,故(10)成立.

特别地,由 $r(t)>0$ 及(10)得 $Z^{(n-1)}(t)\geqslant 0,t\geqslant t_1$. 进而可推得

$$Z'(t)\geqslant 0,\quad t\geqslant t_1.\tag{11}$$

若(11)不成立,则由 n 是偶数及著名的 Kiguradze 引理[10]可得,对更高阶的奇数阶导数有

$$Z^{(k)}(t)<0,k=3,5,\cdots,n-1.$$

但这与上述结果“$Z^{(n-1)}(t)\geqslant 0$”矛盾,故(11)成立.

于是由(9)有

$$[r(t)Z^{(n-1)}(t)]'+H(t)\int_c^d U(t-\sigma)\mathrm{d}\sigma\leqslant 0,\quad t\geqslant t_1.\tag{12}$$

注意到 $Z(t)\geqslant U(t),Z'(t)\geqslant 0,t\geqslant t_1$,由(12)可得

$$\begin{aligned}0\geqslant&[r(t)Z^{(n-1)}(t)]'+H(t)\int_c^d U(t-\sigma)\mathrm{d}\sigma\geqslant[r(t)Z^{(n-1)}(t)]'+\\&H(t)\int_c^d[Z(t-\sigma)-\int_\alpha^\beta p(t-\sigma,\tau)U(t-\sigma-\tau)\mathrm{d}\tau]\mathrm{d}\sigma\geqslant\\&[r(t)Z^{(n-1)}(t)]'+H(t)\int_c^d\left[1-\int_\alpha^\beta p(t-\sigma,\tau)\mathrm{d}\tau\right]Z(t-\sigma)\mathrm{d}\sigma,\quad t\geqslant t_1.\end{aligned}$$

从 t_1 到 $t(t>t_1)$ 积分上式可得

$$r(t)Z^{(n-1)}(t)-r(t_1)Z^{(n-1)}(t_1)+Z(t_1-\sigma)\int_{t_1}^t\left\{H(s)\int_c^d\left[1-\int_\alpha^\beta p(s-\sigma,\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\sigma\right\}\mathrm{d}s\leqslant 0.$$

在上式中,令 $t\to\infty$,并结合 $r(t)Z^{(n-1)}(t)$ 在$[t_1,\infty)$上单调减少及 $r(t)Z^{(n-1)}(t)\geqslant 0$ 可得

$$\int_{t_1}^\infty\left\{H(t)\int_c^d\left[1-\int_\alpha^\beta p(t-\sigma,\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\sigma\right\}\mathrm{d}t<\infty.$$

但这与(3)矛盾,故定理 1 得证.

由微分不等式(9),有

$$\left[r(t)\left(U(t)+\int_\alpha^\beta p(t,\tau)U(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right)^{(n-1)}\right]'+Q(t)U(t)\leqslant 0,\quad t\geqslant t_1.$$

类似于定理 1 的证明,我们可得如下定理.

定理 2 若

$$\int_0^\infty Q(t)\left[1-\int_\alpha^\beta p(t,\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}t=\infty,\quad t_0>0,$$

则边值问题(1),(2)的所有解在 G 内振动,其中 λ_0 由问题(3)确定.

由定理 1,我们有如下推论.

推论 1 若微分不等式(9)无最终正解,则边值问题(1),(2)的所有解在 G 内振动.

利用如下的特征值引理,我们可得到许多关于边值问题(1),(2)的类似结果. 下面,我们假设 $h_0(u)$,$h_1(u)$都是常数(不妨假设都是 1).

引理 1[11] 设 λ_0 是如下 Dirichlet 特征值问题

$$\begin{cases}\Delta\phi(x)+\lambda\phi(x)=0, & x\in\Omega,\lambda\text{ 是常数}\\ \phi(x)=0, & x\in\partial\Omega\end{cases}\tag{13}$$

的最小特征值,$\phi(x)$是与λ_0对应的特征函数,则$\lambda_0>0,\phi(x)>0,x\in\Omega$.

定理 3 设定理 1 中的条件均满足,则边值问题(1),(2)的所有解在 G 内振动.

证明 假设边值问题(1),(2)有一个非振动解 $u(x,t)$,不失一般性,不妨设 $u(x,t)>0,t\geqslant t_0,t_0$ 为某一正常数(对于 $u(x,t)<0$ 的情形,令 $\bar{u}(x,t)=-u(x,t)$,可类似证明),则由(H_4)知,存在 $t_1\geqslant t_0$,使得对任意的$(x,t)\in\Omega\times[t_1,\infty)$,有 $u(x,t)>0,u(x,t-\tau)>0,u(x,t-\sigma)>0,u(x,\rho(t))>0$.

将方程(1)两边同乘以 Dirichlet 问题(13)的最小特征值 λ_0 所对应的特征函数 $\phi(x)$,并在区域 Ω 上关于 x 积分,得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[r(t)\frac{d^{n-1}}{\mathrm{d}t^{n-1}}\left(\int_\Omega u\phi(x)\mathrm{d}x+\int_\alpha^\beta p(t,\tau)\int_\Omega u(x,t-\tau)\phi(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\right)\right]+$$
$$\int_\Omega q(x,t)u\phi(x)\mathrm{d}x+\int_\Omega\left(\int_c^d f(x,t,u(x,t-\sigma))\mathrm{d}\sigma\right)\phi(x)\mathrm{d}x=$$
$$a_0(t)\int_\Omega\phi(x)\Delta u\mathrm{d}x+a_1(t)\int_\Omega\phi(t)\Delta u(x,\rho(t))\mathrm{d}x,\quad t\geqslant t_1. \tag{14}$$

由 Green 公式及边值条件(2),并结合引理 1,有

$$\int_\Omega\phi(x)\Delta u\mathrm{d}x=\int_{\partial\Omega}\phi(x)\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{N}}\mathrm{d}S-\int_{\partial\Omega}u\frac{\partial\phi(x)}{\partial \boldsymbol{N}}\mathrm{d}S+\int_\Omega u\Delta\phi(x)\mathrm{d}x=-\lambda_0\int_\Omega u\phi(x)\mathrm{d}x,\quad t\geqslant t_1, \tag{15}$$

$$\int_\Omega\phi(x)\Delta u(x,\rho(t))\mathrm{d}x=-\lambda_0\int_\Omega u(x,\rho(t))\phi(x)\mathrm{d}x,\quad t\geqslant t_1. \tag{16}$$

又由(H_2),(H_3)有

$$\int_\Omega q(x,t)u\phi(x)\mathrm{d}x\geqslant Q(t)\int_\Omega u\phi(x)\mathrm{d}x,\quad t\geqslant t_1, \tag{17}$$

$$\int_\Omega\left(\int_c^d f(x,t,u(x,t-\sigma))\mathrm{d}\sigma\right)\phi(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_\Omega\left(\int_c^d h(x,t)u(x,t-\sigma)\mathrm{d}\sigma\right)\phi(x)\mathrm{d}x\geqslant$$
$$H(t)\int_c^d\left(\int_\Omega u(x,t-\sigma)\phi(x)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\sigma,\quad t\geqslant t_1. \tag{18}$$

令 $V(t)=\int_\Omega u\phi(x)\mathrm{d}x$,显然,$V(t)>0,t\geqslant t_1$. 于是由(14)-(18)可得

$$\left[r(t)\left(V(t)+\int_\alpha^\beta p(t,\tau)V(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right)^{(n-1)}\right]'+$$
$$\lambda_0a_1(t)V(\rho(t))+(\lambda_0a_0(t)+Q(t))V(t)+H(t)\int_c^d V(t-\sigma)\mathrm{d}\sigma\leqslant 0,\quad t\geqslant t_1. \tag{19}$$

令 $Y(t)=V(t)+\int_\alpha^\beta p(t,\tau)V(t-\tau)\mathrm{d}\tau$,则易知 $Y(t)\geqslant V(t)>0,[r(t)Y^{(n-1)}(t)]'\leqslant 0,t\geqslant t_1$. 如同定理 1 的证明,类似可推得

$$Y^{(n-1)}(t)\geqslant 0,Y'(t)\geqslant 0,t\geqslant t_1.$$

由(19)有

$$[r(t)Y^{(n-1)}(t)]'+H(t)\int_c^d V(t-\sigma)\mathrm{d}\sigma\leqslant 0,\quad t\geqslant t_1.$$

余下证明同定理 1 的后半部分的证明. 故略. 定理 3 证毕.

由微分不等式(19),有

$$\left[r(t)\left(V(t)+\int_\alpha^\beta p(t,\tau)V(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right)^{(n-1)}\right]'+(\lambda_0a_0(t)+Q(t))V(t)\leqslant 0,\quad t\geqslant t_1.$$

类似于定理 3 的证明,我们可得如下定理.

定理 4 若

$$\int_{t_0}^\infty\left\{(\lambda_0a_0(t)+Q(t))\left[1-\int_\alpha^\beta p(t,\tau)\mathrm{d}\tau\right]\right\}\mathrm{d}t=\infty,\quad t_0>0,$$

则边值问题(1),(2)的所有解在 G 内振动,其中 λ_0 由问题(13)确定.

由微分不等式(19),有

$$\left[r(t)\left(V(t)+\int_\alpha^\beta p(t,\tau)V(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right)^{(n-1)}\right]'+\lambda_0 a_1(t)V(\rho(t))\leqslant 0,\quad t\geqslant t_1.$$

类似于定理 3 的证明,我们可得如下定理. 值得注意的是该定理中的判据仅依赖于含时滞的 Laplace 项的扩散系数 $a_1(t)$.

定理 5　若

$$\int_{t_0}^\infty\left\{\lambda_0 a_1(t)\left[1-\int_\alpha^\beta p(\rho(t),\tau)\mathrm{d}\tau\right]\right\}\mathrm{d}t=\infty,\quad t_0>0,$$

则边值问题(1),(2)的所有解在 G 内振动,其中 λ_0 由问题(13)确定.

由定理 3,我们有如下推论.

推论 2　若微分不等式(19)无最终正解,则边值问题(1),(2)的所有解在 G 内振动.

注　利用本文的思想,我们还可以考虑其它边值条件. 譬如,考虑如下的 Robin 边值条件

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{N}}+\mu(x)u=0,\quad (x,t)\in\partial\Omega\times R_+,\tag{20}$$

式中,$\mu(x)\in C(\partial\Omega,(0,\infty))$. 只要将文中的假设条件$(H_5)$改为:

$$(H_5)'h_0(u),h_1(u)\in C^1(R,R_+),uh_0'(u)\geqslant 0,uh_1'(u)\geqslant 0.$$

我们不难得到边值问题(1),(20)的若干振动判据. 限于篇幅,在此省略之.

2　应用举例

下面给出一个例子来说明本文主要结果的适用性.

例　考虑具分布时滞的六阶非线性中立型广义弹性杆方程

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\mathrm{e}^{-t}\frac{\partial^5}{\partial t^5}\left(u+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}u(x,t-\tau)\mathrm{d}\tau\right)\right]+(\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t})u+(1+\mathrm{e}^t)\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}u(x,t-\sigma)\mathrm{d}\sigma=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+(1+\mathrm{e}^t)\frac{\partial^2}{\partial x^2}u\left(x,t-\frac{3\pi}{2}\right),$$

$$(x,t)\in(0,\pi)\times[0,\infty)\tag{21}$$

及边值条件

$$u(0,t)=u(\pi,t)=0,\quad t\geqslant 0.\tag{22}$$

这里

$$r(t)=\mathrm{e}^{-t},p(t,\tau)=\frac{1}{2},q(x,t)=\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t},f(x,t,u)=(1+\mathrm{e}^t)u,a_0(t)=1,$$

$$a_1(t)=1+\mathrm{e}^t,\alpha=\frac{\pi}{2},\beta=\pi,c=\frac{\pi}{2},d=\pi,\rho(t)=t-\frac{3\pi}{2}.$$

显然 $\lambda_0=1,\phi(x)=\sin x,x\in\Omega$. 不难验证本例满足定理 3 的全部条件,所以问题(21),(22)的所有解在$(0,\pi)\times[0,\infty)$上振动. 事实上 $u(x,t)=\sin x\cos t$ 就是这样的一个解.

3　结论

本文讨论一类带分布时滞的偶数阶非线性中立型广义弹性杆方程在 Dirichlet 边值条件下解的振动性问题,得到了判别其所有解振动的几个新的充分性条件,所得结果充分表明分布时滞对弹性杆结构振动性的影响作用,这为改进和完善工程机械、轨道交通、航空航天、高层建筑等领域的减振降噪技术提供数学理论依据和科学基础.

[参考文献]

[1]　WANG P G, WU Y H, CACCETTA L. Oscillation criteria for boundary value problems of high-order partial functional differential equations[J]. Journal of computational applied mathematics,2007,206(1):567-577.

[2]　YANG Q G. On the oscillation of certain nonlinear neutral partial differential equations[J]. Applied mathematics letters, 2007,20:900-907.

[3]　GUI G H,XU Z T. Oscillation of even order partial differential equations with distributed deviating arguments[J]. Journal of

computational and applied mathematics,2009,228(1):20-29.

[4] WANG C Y,SHU W. Oscillation of partial population model with diffusion and delay[J]. Applied mathematics letters,2009, 22(12):1793-1797.

[5] SHOUKAKU Y. Forced oscillatory results of hyperbolic equations with continuous distributed deviating arguments[J]. Applied mathematics letters,2011,24(4):407-411.

[6] SHOUKAKU Y, STAVROULAKIS I P, YOSHIDA N. Oscillation criteria for nonlinear neutral hyperbolic equations with functional arguments[J]. Nonlinear oscillations,2011,14(1):134-148.

[7] LIU Y J,ZHANG J W,YAN J R. Oscillation properties for systems of higher-order partial differential equations with distributed deviating arguments[J]. Discrete dynamics in nature and society,2015,2015:1-9.

[8] 赵环环,刘有军,燕居让. 带分布时滞偶数阶微分方程组的振动性[J]. 应用数学学报,2017,40(4):612-622.

[9] LUO Z G,LUO L P,ZENG Y H. Oscillation results for BVPs of even order nonlinear neutral partial differential equations[J]. Journal of nonlinear modeling and analysis,2019,1(2):261-270.

[10] ERBE L H,KONG Q K,ZHANG B G. Oscillation theory for functional differential equation[M]. New York:Marcel Dekker, 1995:289.

[11] GILBARG D,TRUDINGER N S. Elliptic partial equations of second order[M]. Berlin:Springer-Verlag,1977.

[责任编辑:陆炳新]