

微弱复合信号的随机共振

查进道¹, 李春彪², 雷腾飞^{3,4}

(1.江苏经贸职业技术学院,江苏 南京 211168)
(2.南京信息工程大学人工智能学院,江苏 南京 210044)
(3.齐鲁理工学院忆阻计算应用协同创新中心,山东 济南 250200)
(4.山东省中德智慧工厂应用工程研究中心,山东 济南 250200)

[摘要] 本文基于绝热近似理论,统一了输入信号为微弱周期信号和非周期信号的随机共振系统的信噪比,以此信噪比为适应度函数,利用差分进化算法可对微弱复合信号的随机共振系统参数进行寻优. 通过对随机共振系统的理论分析与仿真实验发现,若输入信号混有多个不同频率的微弱复合信号,本算法能有效分离较大能量的频率分量;若输入的微弱复合信号含经符号函数调制的多个频率分量,也能对其中较大能量的频率成分进行有效提取;若输入的微弱复合信号包含多个能量相差不大的脉冲信号,则各个脉冲信号皆可提取.

[关键词] 随机共振, Langevin 方程, 信噪比, 差分进化算法

[中图分类号] TH133.33 [文献标志码] A [文章编号] 1001-4616(2022)04-0026-09

Stochastic Resonance of Compound Weak Signal

Zha Jindao¹, Li Chunbiao², Lei Tengfei^{3,4}

(1.Jiangsu Vocational Institute of Commerce, Nanjing 211168, China)
(2.School of Artificial Intelligence, Nanjing University of Information Science & Technology, Nanjing 210044, China)
(3Collaborative Innovation Center of Memristive Computing Application, Qilu Institute of Technology, Jinan 250200, China)
4.Engineering Research Center of Shandong Sino-German Smart Factory Application, Jinan 250200, China)

Abstract: A unified definition of signal-to-noise ratio for the stochastic resonance of compound periodic and aperiodic weak signal is proposed according to the adiabatic approximation theory, based on that the fitness function to optimize the parameters of the stochastic resonance system is constructed by differential evolution algorithm. Theoretical analysis and numerical simulation proves the effectiveness of the proposed method of stochastic resonance. When the input signal contains multiple-frequency weak signals, the specific frequency signal with larger energy can be separated out; If the input weak compound signal contains multiple-frequency components modulated by signum function, the one with larger energy can also be extracted effectively; If the input weak compound signal contains multiple-pulse signals with almost approximate energy, all of them can be extracted effectively.

Key words: stochastic resonance, Langevin equation, signal-to-noise ratio, differential evolution algorithm

自从 Benzi 首次提出随机共振以来,随机共振理论已成为近些年非线性领域研究热点之一,主要包括绝热近似理论^[1-2]、线性响应理论^[3-4]、驻留时间分布理论^[5]等. 对特征信号的检测方法^[6-7]的研究在许多工程应用领域备受关注,其中随机共振方法是一种基于随机共振理论的用于微弱信号增强、检测的方法,其思想是通过调节系统的参数(包括噪声的强度)达到提高系统输出的信噪比的目的,如参数调节随机共振^[8-12]、非周期随机共振^[13-15]等. 对于输入信号为简单的微弱周期信号(如正弦信号等)的随机共振测度指标常采用文[16]中定义的信噪比,对于输入信号为微弱非周期信号的随机共振测度指标常采用互相关函数^[17]、平均互信息量^[18]、Kullback 熵^[19]等,但对于输入信号为复杂的周期信号和非周期信号的随机共振测度指标鲜有讨论. 本文基于绝热近似理论,对于输入信号 $s(t)$ 为复杂的微弱周期信号或微弱非周期

收稿日期:2022-04-20.

基金项目:国家自然科学基金项目(61871230)、江苏高校优势学科Ⅲ期建设工程资助项目、江苏省哲学社会科学优秀创新团队资助项目.

通讯作者:李春彪,博士,教授,研究方向:非线性电路与系统及其应用. E-mail: goontry@126.com, chunbiaolee@nuist.edu.cn

信号的随机共振系统的输出信号的信噪比进行了讨论. 记 $s(t)$ 的 Fourier 展开式中频率为 ω_k 的系数的平方和为 $a_k^2+b_k^2$, k_1 为 $a_k^2+b_k^2$, ($k \in N$) 中的最大者的足标中的最小者, 定义输出信噪比 SNR 为频率为 ω_{k_1} 的输出信号的功率 $P_{S_{k_1}}$ 与 $\omega=\omega_{k_1}$ 处的背景噪声的功率 $P_{N_{k_1}}$ 之比, 从而对于输入信号 $s(t)$ 为复杂的微弱周期信号或微弱非周期信号的随机共振给出了统一形式的信噪比的定义. 由于差分进化算法具有很强的全局寻优功能、较快的收敛速度及较好的稳定性, 本文以所定义的信噪比为适应度函数, 利用差分进化算法对随机共振系统的参数进行寻优. 分别通过对输入信号为含 7 个不同频率的叠加信号、含符号函数调制的复杂周期信号及含多脉冲的非周期信号的随机共振系统的仿真实验, 表明所定义的信噪比 SNR 及确定随机共振系统的参数的方法是有效的.

1 输出信号的信噪比

依绝热近似理论, 考虑 Langevin 方程

$$\frac{dx}{dt} = ax - bx^3 + s(t) + \Gamma(t), \quad (1)$$

式中, $\Gamma(t) = \sqrt{2D}\omega(t)$, 且 $E[\Gamma(t)\Gamma(t+\tau)] = 2D\delta(\tau)$, D 为噪声强度; $\omega(t)$ 是零均值、单位方差的白噪声; $s(t)$ 为逐段光滑函数. 该方程表示叠加了驱动力 $s(t)$ 和噪声 $\Gamma(t)$ 的具有双势阱 $V(x) = \frac{1}{4}bx^4 - \frac{1}{2}ax^2$

的速度场 $v(x) = ax - bx^3$. 记 $V(x)$ 的两个稳态点 $\pm\sqrt{\frac{a}{b}}$ 为 $\pm x_m$; $n_{\pm}(t)$ 表示系统在时刻 t 时处于 $\pm x_m$ 的概率;

$w_{\pm}(t) = \text{rexp}\left(\pm \frac{x_m}{D}s(t)\right)$ 表示系统在时刻 t 时从 $\pm x_m$ 跃迁的概率, 其中 $r = \frac{a}{\sqrt{2}\pi} \exp\left(-\frac{a^2}{4bD}\right)$, 是 Kramers 跃迁率.

$n_{\pm}(t)$ 、 $n_{\mp}(t)$ 满足

$$\frac{dn_{\pm}}{dt} = -w_{\pm}(t)n_{\pm} + w_{\mp}(t)n_{\mp},$$

及

$$n_{\pm}(t) + n_{\mp}(t) = 1.$$

假设 1 $s(t)$ 是以 $2l(l>0)$ 为周期的周期函数, 且满足以下条件

(1) 在 $[-l, l]$ 上是逐段光滑的;

(2) $\int_{-l}^l s(t)dt = 0$.

引理 1 若 $s(t)$ 满足假设 1.1, 则 $s(t)$ 的不连续点至多可列多个, 且其 Fourier 级数在每一点 $t \in (-\infty, +\infty)$ 收敛,

(3) 当 t 是 $s(t)$ 的连续点时,

$$s(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi t}{l} + b_k \sin \frac{k\pi t}{l} \right).$$

(4) 当 t 是 $s(t)$ 的不连续点时,

$$\frac{s(t_+) + s(t_-)}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi t}{l} + b_k \sin \frac{k\pi t}{l} \right),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leq \int_{-l}^l s^2(t) dt < +\infty,$$

式中, $a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l s(t) \cos \frac{k\pi t}{l} dt$, $b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l s(t) \sin \frac{k\pi t}{l} dt$, ($k = 1, 2, 3, \dots$).

令 $k_1 = \inf \{ k \mid a_k^2 + b_k^2 = \max \{ a_1^2 + b_1^2, a_2^2 + b_2^2, \dots, a_m^2 + b_m^2, \dots \}, m \in N \}$, 即 k_1 为 $a_m^2 + b_m^2$, ($m \in N$) 中的最大者的足标中的最小足标.

假设 2 $\omega_{k_1} = \frac{k_1 \pi}{l} \leq 2r, \sqrt{a_{k_1}^2 + b_{k_1}^2} \leq 1, D \leq 1$;

类似于[1]的讨论,方程(1)的满足初始条件 $x_0=x(t_0)$ 的条件概率

$$n_+(t|x_0, t_0) = 1 - n_-(t|x_0, t_0) = \frac{1}{2} \left\{ \exp[-2r(t-t_0)] \times [2\delta(x_0 - x_m) - 1 - \frac{2rx_m}{D} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k \cos(\omega_k t_0 + \varphi_k) + b_k \sin(\omega_k t_0 + \varphi_k)}{\sqrt{4r^2 + \omega_k^2}}] + 1 + \frac{2rx_m}{D} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k \cos(\omega_k t + \varphi_k) + b_k \sin(\omega_k t + \varphi_k)}{\sqrt{4r^2 + \omega_k^2}} \right\} + o\left(\frac{x_m \sqrt{a_{k_1}^2 + b_{k_1}^2}}{D}\right);$$

式中, $\omega_k = \frac{k\pi}{l}$, $\varphi_k = -\arctan \frac{\omega_k}{2r}$, $(k=1, 2, 3, \dots)$.

定义在初始条件 $x_0=x(t_0)$ 下系统时间响应的自相关函数为

$$\langle x(t+\tau), x(t) | x_0, t_0 \rangle = \iint xy P(x, t+\tau | y, t) P(y, t | x_0, t_0) dx dy,$$

式中,

$$P(y, t | x_0, t_0) = n_+(t | x_0, t_0) \delta(y - x_m) + n_-(t | x_0, t_0) \delta(y + x_m), \\ P(x, t+\tau | y, t) = n_+(t+\tau | y, t) \delta(x - x_m) + n_-(t+\tau | y, t) \delta(x + x_m).$$

以下忽略高次项 $o\left(\frac{x_m \sqrt{a_{k_1}^2 + b_{k_1}^2}}{D}\right)$, 当 $t_0 \rightarrow -\infty$ 时,

$$\langle x(t+\tau), x(t) \rangle \equiv \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \langle x(t+\tau) x(t) | x_0, t_0 \rangle = x_m^2 \exp(-2r|\tau|) [1 - k^2(t)] + x_m^2 k(t+\tau) k(t),$$

式中,

$$k(t) = \frac{2rx_m}{D} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k \cos(\omega_k t + \varphi_k) + b_k \sin(\omega_k t + \varphi_k)}{\sqrt{4r^2 + \omega_k^2}}, \\ \omega_k = \frac{k\pi}{l}, \varphi_k = -\arctan \frac{\omega_k}{2r}, (k=1, 2, 3, \dots).$$

为了计算谱密度,需要在—个周期 $2l$ 内对 $\langle x(t+\tau), x(t) \rangle$ 再进行时域平均,

$$\langle\langle x(t+\tau), x(t) \rangle\rangle = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l \langle x(t+\tau), x(t) \rangle dt = x_m^2 \exp(-2r_k|\tau|) \left(1 - \frac{2r^2 x_m^2}{D^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^2 + b_k^2}{4r^2 + \omega_k^2} \right) + \frac{2r^2 x_m^4}{D^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^2 + b_k^2}{4r^2 + \omega_k^2} \cos(\omega_k \tau).$$

依维纳—辛钦定理,系统输出的功率谱为

$$G(\omega) = G_N(\omega) + G_S(\omega),$$

式中,

$$G_N(\omega) = \left(1 - \frac{2r^2 x_m^2}{D^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^2 + b_k^2}{4r^2 + \omega_k^2} \right) \frac{4rx_m^2}{4r^2 + \omega^2}, \\ G_S(\omega) = \frac{2\pi r^2 x_m^4}{D^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^2 + b_k^2}{4r^2 + \omega_k^2} [\delta(\omega - \omega_k) + \delta(\omega + \omega_k)].$$

定义 1 系统(1)的输出信噪比 SNR 为频率为 ω_{k_1} 的输出信号的功率 $P_{S_{k_1}}$ 与 $\omega = \omega_{k_1}$ 处的背景噪声的功率 $P_{N_{k_1}}$ 之比,即

$$SNR = \frac{P_{S_{k_1}}}{P_{N_{k_1}}},$$

其中

$$P_{S_{k_1}} = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \int_{\omega_{k_1} - \Delta\omega}^{\omega_{k_1} + \Delta\omega} G_S(\omega) d\omega = \frac{2\pi r^2 x_m^4}{D^2} \times \frac{a_{k_1}^2 + b_{k_1}^2}{4r^2 + \omega_{k_1}^2}, \\ P_{N_{k_1}} = G_N(\omega_{k_1}) = 4rx_m^2 \left(1 - \frac{2r^2 x_m^2}{D^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^2 + b_k^2}{4r^2 + \omega_k^2} \right) \frac{1}{4r^2 + \omega_{k_1}^2}.$$

定理 1 若 $s(t)$ 满足假设 1 和假设 2, 则 $SNR \approx \frac{a^2(a_{k_1}^2+b_{k_1}^2)}{2\sqrt{2}bD^2\left(1-\frac{a(a_{k_1}^2+b_{k_1}^2)}{2bD^2}\right)} \times e^{-\frac{a^2}{4bD}}$.

证明 由引理 1 的(3)及假设 2 知, $\lim_{k \rightarrow \infty} (a_k^2+b_k^2) = 0$, 且 $a_k^2+b_k^2 \leq 1, k \in Z^+$. 又 $\lim_{k \rightarrow \infty} \omega_k^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\pi^2}{l^2} k^2 = \infty$, 及 $\omega_{k_1} = \frac{k_1 \pi}{l} \leq 2r$, 所以

$$P_{N_{k_1}} \approx 4rx_m^2 \left(1 - \frac{2r^2 x_m^2}{D^2} \times \frac{a_{k_1}^2+b_{k_1}^2}{4r^2+\omega_{k_1}^2} \right) \frac{1}{4r^2+\omega_{k_1}^2} \approx 4rx_m^2 \left(1 - \frac{x_m^2(a_{k_1}^2+b_{k_1}^2)}{2D^2} \right) \frac{1}{4r^2+\omega_{k_1}^2}.$$

从而

$$SNR \approx \frac{\frac{2\pi r^2 x_m^4}{D^2} \times \frac{a_{k_1}^2+b_{k_1}^2}{4r^2+\omega_{k_1}^2}}{4rx_m^2 \left(1 - \frac{x_m^2(a_{k_1}^2+b_{k_1}^2)}{2D^2} \right) \frac{1}{4r^2+\omega_{k_1}^2}} = \frac{\pi r x_m^2 (a_{k_1}^2+b_{k_1}^2)}{2D^2 \left(1 - \frac{x_m^2(a_{k_1}^2+b_{k_1}^2)}{2D^2} \right)} = \frac{a^2(a_{k_1}^2+b_{k_1}^2)}{2\sqrt{2}bD^2 \left(1 - \frac{a(a_{k_1}^2+b_{k_1}^2)}{2bD^2} \right)} \times e^{-\frac{a^2}{4bD}}.$$

定理 2 若 $s(t)$ 在 $(0, l]$ 上逐段光滑, $b_k = \frac{2}{l} \int_0^l s(t) \sin \frac{k\pi t}{l} dt, (k=1, 2, 3, \dots)$, 且 $|b_{k_1}| \leq 1$ (其中 $k_1 = \inf$

$\{k | b_k^2 = \max\{b_1^2, b_2^2, \dots, b_m^2, \dots\}, m \in N\}$), 则 $SNR \approx \frac{a^2 b_{k_1}^2 e^{-\frac{a^2}{4bD}}}{2\sqrt{2}bD^2 \left(1 - \frac{ab_{k_1}^2}{2bD^2} \right)}$.

证明 令 $f(t) = \begin{cases} s(t), & t \in (0, l] \\ 0, & t = 0 \\ -s(-t), & t \in (-l, 0) \end{cases}$, 再将 $f(t)$ 在实数集 \mathbf{R} 上以周期为 $2l$ 进行延拓, 得到的函数依

然记作 $f(t)$, 显然 $f(t)$ 满足定理 1 的条件, 从而 $SNR \approx \frac{a^2 b_{k_1}^2 e^{-\frac{a^2}{4bD}}}{2\sqrt{2}bD^2 \left(1 - \frac{ab_{k_1}^2}{2bD^2} \right)}$. 记 $ASN R = \frac{a^2 b_{k_1}^2}{2\sqrt{2}bD^2 \left(1 - \frac{ab_{k_1}^2}{2bD^2} \right)} \times e^{-\frac{a^2}{4bD}}$

为 SNR 的近似值.

注 1 若 $s(t)$ 同时满足 $\omega_{k_1} = \frac{k_1 \pi}{l} \leq 2r$ 和 $\sqrt{a_{k_1}^2+b_{k_1}^2} \leq 1$, 则 $a_{k_1}^2+b_{k_1}^2$ 通常不能很小, 例如不能小于 0.000 1 等.

2 随机共振模型

若 $s(t)$ 为周期信号, 由引理 1 直接写出其 Fourier 展开式, 得到 $a_{k_1}^2+b_{k_1}^2$; 若 $s(t)$ 为在 $(0, l]$ 上的非周期信号, 由定理 2 及引理 1 类似地得到 $a_{k_1}^2+b_{k_1}^2$, 其中 $a_{k_1}^2=0$.

2.1 随机共振系统参数的优化

对于随机系统(1), 要使其产生共振, 参数 a, b, D 的选取是关键. 为此需对(1)进行离散化处理和数值仿真. 由于差分进化算法(DE)是一种包括变异、交叉和选择 3 种基本操作的高效的群体进化的算法, 本文采用差分进化算法对参数 a, b, D 进行优化, 其中适应度函数选用 SNR 的近似值 $ASN R$. 具体算法如下:

步骤 1: 设置时间长度 T 、时间步长 h 及系统(1)的初值 x_0 ; 设置 DE 的最大迭代循环次数 M 、种群规模 N_p 、放缩因子 F 及交叉常数 C_r 等参数; 分别设置参数 a, b, D 的搜索范围 I_1, I_2, I_3 , 其中 I_1, I_2, I_3 的选取要满足条件 $ah \leq 1$ 且 $\sqrt{\frac{ah+2}{bh}} \geq |x_0|$. 令迭代的代数 $j=0$.

步骤 2: 随机生成初始种群 $a^0 = (a_1^0, a_2^0, \dots, a_{N_p}^0)$ 、 $b^0 = (b_1^0, b_2^0, \dots, b_{N_p}^0)$ 和 $D^0 = (D_1^0, D_2^0, \dots, D_{N_p}^0)$, 其中 $a_i^0 \in I_1, b_i^0 \in I_2, D_i^0 \in I_3, (i = 1, 2, \dots, N_p)$. 分别计算它们的适应度值 $ASNR_i = \frac{(a_i^0)^2(a_{k_1}^2 + b_{k_1}^2)}{2\sqrt{2}b_i^0(D_i^0)^2 \left(1 - \frac{a_i^0(a_{k_1}^2 + b_{k_1}^2)}{2b_i^0(D_i^0)^2}\right)} \times e^{-\frac{(a_i^0)^2}{4b_i^0D_i^0}}$, 记录各个体极值、全局极值和全局极值点.

步骤 3: 利用变异、交叉和选择等操作更新种群, 计算新种群各个体的适应度值, 并更新各个体极值、全局极值和全局极值点.

步骤 4: 若 $j < M$, 则 $j \leftarrow j + 1$, 转 Step 3. 否则, 输出全局极值点 a^*, b^*, D^* , 即为参数 a, b, D 的最优取值.

步骤 5: 将 a^*, b^*, D^* 代入(1)建立双稳态随机共振模型.

2.2 复合信号随机共振的实现

设 $s(t)$ 为由微弱周期信号或非周期信号复合而成的复合信号.

步骤 1: 写出 $s(t)$ 的 Fourier 展开式, 得到 $a_{k_1}^2 + b_{k_1}^2$.

步骤 2: 利用 2.1 的算法对参数 a, b, D 进行优化, 得到 a, b, D 的最优取值 a^*, b^*, D^* .

步骤 3: 将 $sn(t) = s(t) + n(t)$, (其中 $n(t)$ 是强度为 D^* 的白噪声) 叠加到系统 $\frac{dx}{dt} = a^*x - b^*x^3$ 得到随机共振系统 $\frac{dx}{dt} = a^*x - b^*x^3 + sn(t)$. 输出信号 $x(t)$ 即为 $s(t)$ 的增强信号.

随机共振系统的建立过程如图 1 所示:

注 2 由引理 1 的 (3) 可知, 当微弱周期信号 $s(t)$ 的幅值远小于 1 时, $\sqrt{a_{k_1}^2 + b_{k_1}^2} \leq 1$. 若同时满足 $\omega_{k_1} \leq 2r$, 由定理 1、定理 2 知, 可以采用上述算法建立随机共振模型, 能有效地提取复合信号中的频率分量 ω_{k_1} , 并且输出信号也得到了增强.

注 3 在采用上述算法建立双稳态随机共振模型时, $a_{k_1}^2 + b_{k_1}^2$ 可以精确确定或者是某种精度下的估计值, 因此利用该随机共振模型也能有效地提取复合信号中幅值与 $\sqrt{a_{k_1}^2 + b_{k_1}^2}$ 相近的、频率远小于 $2r$ 的其它频率分量.

3 数值仿真

下面分别对输入信号 $s(t)$ 为由微弱周期信号和非周期信号复合而成的复合信号进行仿真. 其中 $x_0 = 0.009, M = 1500, N_p = 1\ 500, F = 0.5, C_r = 0.4, a, b, D$ 的搜索范围分别取 $I_1 = [0.001, 10], I_2 = [0.001, 100], I_3 = [0.000\ 03, 0.3]$.

3.1 $s(t)$ 为周期信号

引理 2 若

$$s(t) = \sum_{k=1}^n a_k f_k(t),$$

式中, a_k 为实数, $f_k(t)$ 是以 T_k 为最小正周期的周期函数, 其中 T_k 为正有理数, $(k = 1, 2, \dots, n)$, 则 $s(t)$ 为周期函数.

证明 令 $T_k = \frac{q_k}{p_k}$, (p_k, q_k 均为正整数, $k = 1, 2, \dots, n$), M 为 p_1, p_2, \dots, p_n 的最大公约数, N 为 q_1, q_2, \dots, q_n 的最小公倍数, 则 $\frac{N}{M}$ 为 $s(t)$ 的周期.

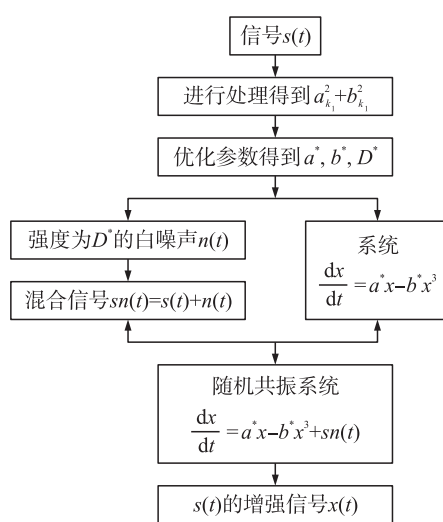


图 1 随机共振系统的建立

Fig. 1 Establishment of stochastic resonance system

推论 1 若

$$s(t) = \sum_{k=1}^n (a_k \cos \alpha_k \pi t + b_k \sin \alpha_k \pi t),$$

式中, a_k, b_k 为实数, α_k 为正有理数, $(k=1, 2, \dots, n)$, 则 $s(t)$ 为周期函数.

证明 由引理 2 直接得到结论.

例 1 $s(t) = 0.048 \cos 0.0092 \pi t + 0.024 \sin 0.04 \pi t + 0.016 \cos 0.1 \pi t + 0.024 \sin 0.05 \pi t + 0.024 \sin 0.11 \pi t + 0.016 \cos 0.056 \pi t + 0.0024 \sin 0.116 \pi t$

显然 $\sqrt{a_{k_1}^2 + b_{k_1}^2} = 0.048$. 由推论 1 知 $s(t)$ 为周期函数. 取 $T=6660, h=0.1$, 利用 2 中优化算法得到随机共振系统(1)中的参数 $a=1.8060, b=67.7616, D=0.0055$.

由图 2(e) 可以看出, 对于输入信号 $s(t)$ 是由多个不同频率的微弱信号叠加而成的复合信号, 通过利用差分进化算法优化随机共振系统(1)中的参数 a, b, D , 能够有效地提取混合信号的不同频率, 并且输出信号得到了增强. 对比图 2(b)、(e) 显示未能检测出频率为 0.058 的叠加信号, 这是因为其幅值远小于 $\sqrt{a_{k_1}^2 + b_{k_1}^2}$.

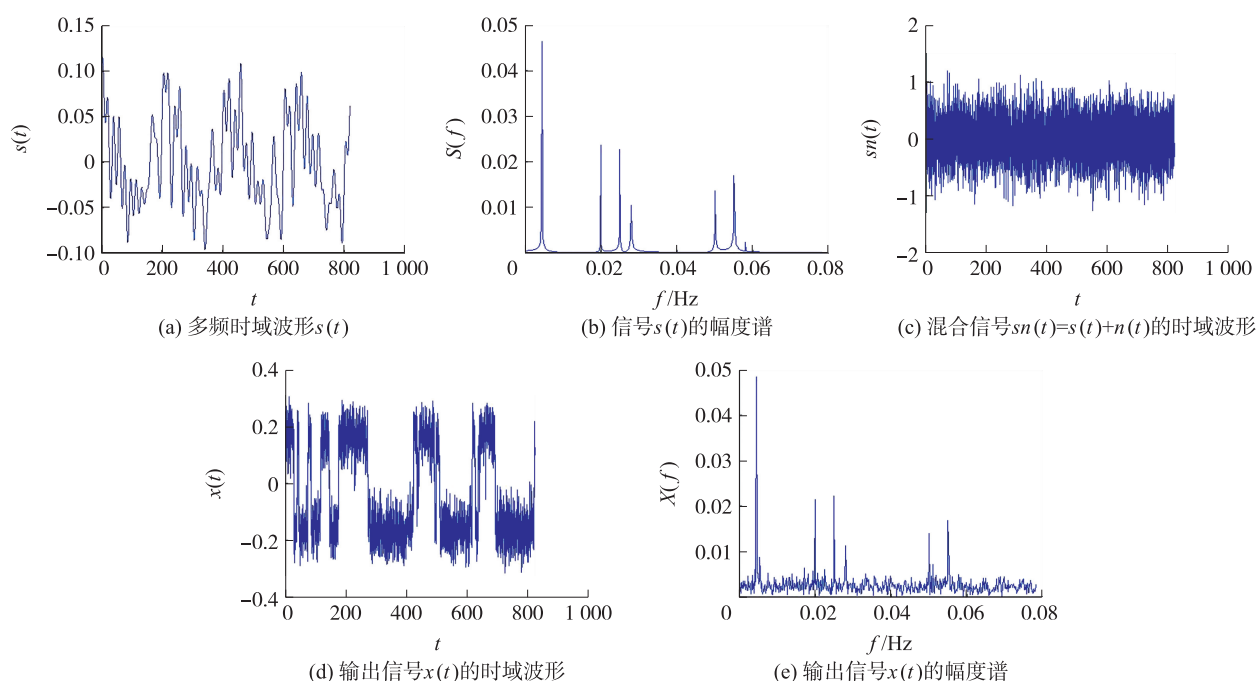


图 2 多频输入信号以及经过随机共振系统的输出信号

Fig. 2 Multi-frequency input signal and the output signal from the stochastic resonance system

例 2 $s(t) = 0.024 \operatorname{sgn}(\sin 0.01 \pi t) \cos(0.034 \pi t) + 0.024 \operatorname{sgn}(\sin 0.003 \pi t) \sin(0.04 \pi t)$.

由引理 2 知 $s(t)$ 是周期函数. 取 $T=6660, h=0.1$, 依 2 中优化算法得到随机共振系统(1)中的参数 $a=1.8060, b=67.7616, D=0.0055$.

对比图 3(b)(e), (a)(d) 可以看出, 对于输入信号 $s(t)$ 是由多个不同频率的微弱信号及符号函数调制、叠加而成的复合信号, 通过利用差分进化算法优化随机共振系统(1)中的参数 a, b, D , 能够有效地提取混合信号的不同频率, 并且输出信号得到了增强.

3.2 $s(t)$ 为非周期信号

常见的非周期信号, 如矩形波信号(包括脉冲信号)、三角波信号、尖顶波信号等, 是用分段函数来表示的. 由于分段函数在任意一个分段区间 I 上的值可以表示为一个定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f_I(x)$ 与一个在 I 上取 1、在 $\mathbf{R}-I$ 上取 0 的函数 $h_I(x)$ 的乘积, 其中 $h_I(x)$ 可以用符号函数来表示, 例如若 $I=(c, d)$, 则 $h_I(x)$ 可表示为 $\frac{1}{2}[\operatorname{sgn}(x-c) - \operatorname{sgn}(x-d)]$, 所以诸如矩形波信号、脉冲信号、三角波信号、尖顶波信号等非周期信号可以用符号函数来表示或者调制. 下面以在 $[0, 180]$ 内由多个微弱的脉冲信号叠加而成的非周期信号作

为输入信号 $s(t)$ 为例进行仿真.

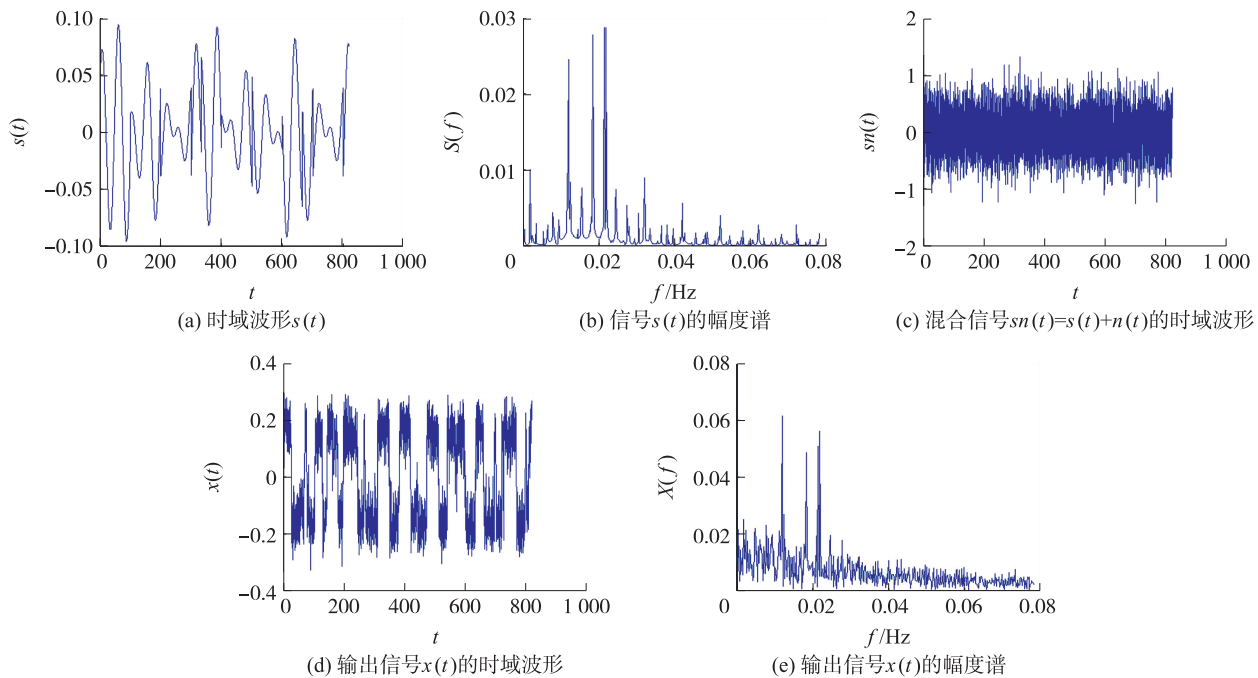


图 3 复合输入信号以及经过随机共振系统的输出信号

Fig. 3 Compound input signal and the output signal from the stochastic resonance system

例 3 $s(t) = 0.72[\operatorname{sgn}(t-29.75) - \operatorname{sgn}(t-30.25) + \operatorname{sgn}(t-69.75) - \operatorname{sgn}(t-70.25) + \operatorname{sgn}(t-79.75) - \operatorname{sgn}(t-80.25) + \operatorname{sgn}(t-119.75) - \operatorname{sgn}(t-120.25)] - 0.48$.

显然 $s(t)$ 不是周期函数. 取 $T=180, h=0.01$, 依定理 2 及第 2.1 节中优化算法得到随机共振系统 (1) 中的参数 $a=0.200\ 2, b=76.128\ 1, D=0.017\ 4$.

由图 4(b)(e) 可以看出, 输入信号 $s(t)$ 和输出信号 $x(t)$ 在 $[0, 180]$ 内均不含周期分量. 比对图 3(a)(d) 可以看出, 对于输入信号 $s(t)$ 是由多个微弱的脉冲信号叠加而成的非周期信号, 通过利用差分进化算法优化随机共振系统 (1) 中的参数 a, b, D , 也能够有效地提取各脉冲信号.

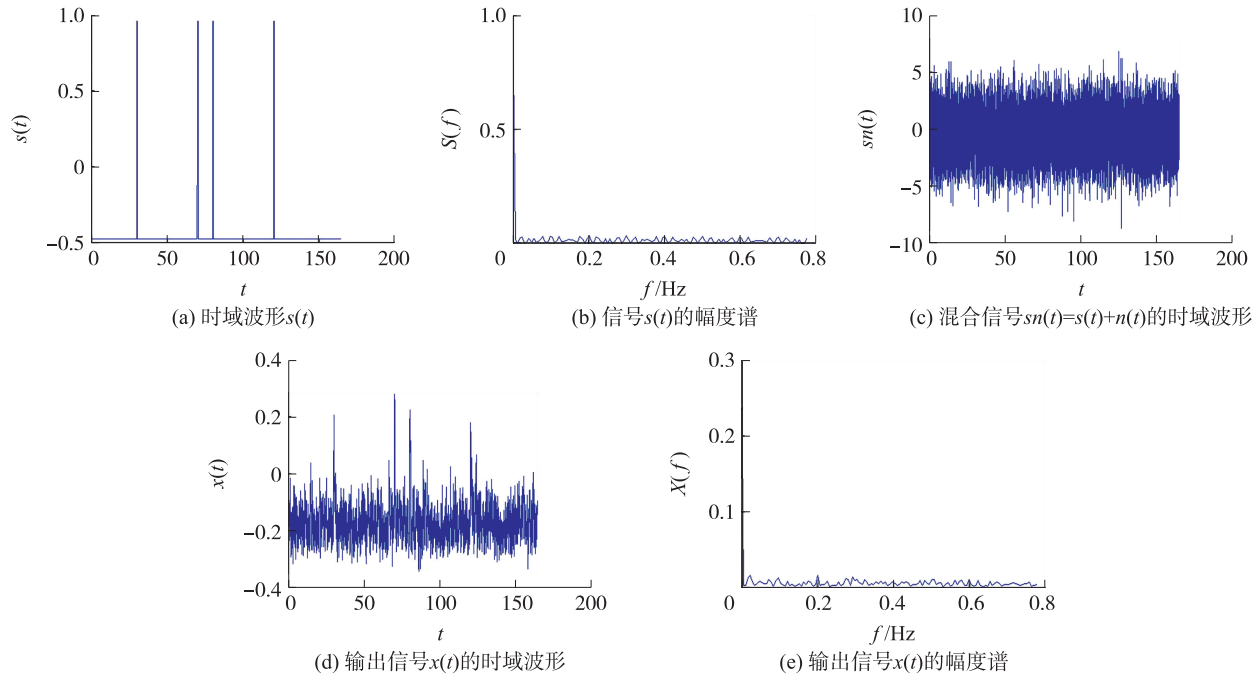


图 4 非周期输入信号以及经过随机共振系统的输出信号

Fig. 4 Aperiodic input signal and the output signal from the stochastic resonance system

注 3 对于非矩形波信号,构成非矩形波形的某条边上的点的纵坐标可能有正有负,由于系统(1)是在两个势阱之间跃迁,通过系统(1)的共振,纵坐标为负的部分和纵坐标为正的部分可能分别分成两段显示出来,所以就有可能与原输入信号的波形有较大偏差. 因此对于输入信号 $s(t)$ 中叠加有三角波形等非矩形波信号的情形,可能不能有效地提取各叠加信号.

4 结论

首先,对于输入信号 $s(t)$ 为微弱周期信号和非周期信号的随机共振系统(1),定理 1.1、定理 1.2 分别给出了统一形式的信噪比 $SNR \approx \frac{a^2(a_{k_1}^2 + b_{k_1}^2)}{2\sqrt{2}bD^2 \left(1 - \frac{a(a_{k_1}^2 + b_{k_1}^2)}{2bD^2}\right)} \times e^{-\frac{a^2}{4bD}}$, 其中 k_1 为 $s(t)$ 的 Fourier 展开式中频率为

ω_k 的系数的平方和为 $a_k^2 + b_k^2$ ($k \in N$) 中的最大者的足标中的最小者,且当 $s(t)$ 为微弱非周期信号时 $a_{k_1}^2 = 0$. 其次,对于输入信号 $s(t)$ 为由微弱周期信号和非周期信号复合而成的复合信号的随机共振系统,以 $ASN =$

$\frac{a^2(a_{k_1}^2 + b_{k_1}^2)}{2\sqrt{2}bD^2 \left(1 - \frac{a(a_{k_1}^2 + b_{k_1}^2)}{2bD^2}\right)} \times e^{-\frac{a^2}{4bD}}$ 为适应度函数,利用差分进化算法对随机共振系统(1)的参数 a, b, D 进行寻

优,进而确定了参数 a, b, D 的值,建立起随机共振模型. 最后,分别以输入信号 $s(t)$ 为由多个不同频率的微弱信号叠加而成的复合周期信号和由经符号函数调制的多个不同频率的微弱信号叠加而成的复合周期信号为例验证了所建立的随机共振模型能够有效地提取复合信号中幅值为 $\sqrt{a_{k_1}^2 + b_{k_1}^2}$ 或与 $\sqrt{a_{k_1}^2 + b_{k_1}^2}$ 相近的、频率远小于 $2r$ 的分量,并且输出信号得到了增强;以输入信号 $s(t)$ 为由多个微弱的脉冲信号叠加而成的复合非周期信号为例验证了所建立的随机共振模型能够有效地提取复合信号中幅值为 $\sqrt{a_{k_1}^2 + b_{k_1}^2}$ 或与 $\sqrt{a_{k_1}^2 + b_{k_1}^2}$ 相近的各脉冲信号分量.

[参考文献]

- [1] MCNAMARA B, WIESENFELD K. Theory of stochastic resonance[J]. Physical review A, 1989, 39(9): 4854–4869.
- [2] 刘广凯, 全厚德, 康艳梅, 等. 一种随机共振增强正弦信号的二次多项式接收方法[J]. 物理学报, 2019, 68: 210501.
- [3] JUNG P, HÄNGGI P. Amplification of small signals via stochastic resonance[J]. Physical review A, 1991, 44(12): 8032–8042.
- [4] GAMMATTONI L, MARCHESONI F, MENICHELLA-SAETTA E, et al. Stochastic resonance in bistable systems[J]. Physical review letters, 1989, 62: 349–352.
- [5] ZHOU T, MOSS F. Analog simulations of stochastic resonance[J]. Physical review A, 1990, 41(8): 4255–4264.
- [6] 柏顺, 颜夕宏, 张生平, 等. 基于梅尔频率倒谱系数与短时能量的低信噪比语音端点检测[J]. 南京师大学报(自然科学版), 2021, 44(2): 117–120.
- [7] 马宏陆, 葛琳琳, 牛强, 等. 一种基于改进 EMD 的风机振动信号异常检测方法[J]. 南京师大学报(自然科学版), 2017, 40(1): 55–64.
- [8] 乔岩茹, 陈健龙, 侯文. 基于布谷鸟算法优化随机共振参数的轴承故障检测算法[J]. 电子测量技术, 2021, 44(20): 88–93.
- [9] 崔伟成, 李伟, 孟凡磊, 等. 基于果蝇优化算法的自适应随机共振轴承故障信号检测方法[J]. 振动与冲击, 2016, 35(10): 96–100.
- [10] 刘进军, 冷永刚, 张雨阳等. 势函数特征参数调节随机共振及动车轴承故障检测研究[J]. 振动与冲击, 2019, 38(13): 26–33.
- [11] 尹进田, 唐杰, 刘丽, 等. 参数同步优化随机共振在牵引传动系统早期微弱故障诊断中的应用[J]. 振动与冲击, 2021, 40(17): 234–240.
- [12] 罗琦, 朱敏, 韦香. 多频信号的自适应随机共振检测方法[J]. 武汉大学学报(理学版), 2013, 59: 260–266.
- [13] COLLINS J J, CHOW C C, IMHOFF T T. Stochastic resonance without tuning[J]. Nature, 1995, 376: 236–238.

-
- [14] NEIMAN A, SCHIMANSKY G L. Stochastic resonance in bistable systems driven by harmonic noise[J]. Physical review letters, 1994, 72: 2988–2991.
- [15] CAPURRO A, PAKDAMAN K, NOMURA T, et al. Aperiodic stochastic resonance with correlated noise[J]. Physical review E, 1998, 58: 4820–4827.
- [16] FAUVE S, HESLOT F. Stochastic resonance in bistable system[J]. Physical review letters, 1983, 97A: 5–7.
- [17] COLLINS J J, IMHOFF T, GRIGG P. Noise-enhanced tactile sensation[J]. Nature, 1996, 383: 770–770.
- [18] HENEGHAN C, CHOW C C, COLLINS J J, et al. Information measure quantifying aperiodic stochastic resonance[J]. Physical review E, 1996, 54(3): 2228–2231.
- [19] NEIMAN A, BORIS S, VADIM A, et al. Dynamical entropies applied to stochastic resonance[J]. Physical review letters, 1996, 76(23): 4299–4302.

[责任编辑:顾晓天]