doi:10.3969/j.issn.1001-4616.2023.01.003

由 G-布朗运动驱动的具有一致连续性生成元的 BSDE 的解的极限定理

袁明霞[1],王丙均[2],肖庆坤[3]

(1.南京交通职业技术学院基础部,江苏 南京 211188)
(2.金陵科技学院理学院,江苏 南京 211169)
(3.南京农业大学理学院,江苏 南京 210095)

[**摘要**] 研究了由 G-布朗运动驱动的具有一致连续性生成元的倒向随机微分方程的解的极限定理,并由此得到了该方程的逆比较定理.

[**关键词**] 极限定理,G-布朗运动,一致连续生成元

[**中图分类号**]O175.29;O211.6 [**文献标志码**]A [**文章编号**]1001-4616(2023)01-0011-07

A Limit Theorem for Solutions of BSDEs Driven by G-Brownian Motion with Uniformly Continuous Generators

Yuan Mingxia[1],Wang Bingjun[2],Xiao Qingkun[3]

(1.Basic Department,Nanjing Vocational Institute of Transport Technology,Nanjing 211188,China)
(2.College of Science,Jinling Institute of Technology,Nanjing 211169,China)
(3.College of Science,Nanjing Agricultural University,Nanjing 210095,China)

Abstract:In this paper,we study the limit theorem for solutions of BSDEs driven by G-Brownian motion with uniformly continuous generators and then we use the representation theorem to get a converse comparison theorem for GBSDEs with uniformly continuous generators.

Key words:limit theorem,G-Brownian motion,uniformly continuous generators

近年来,彭[1,2]系统地建立了 G-期望理论. 在 G-期望框架下,G-布朗运动,关于 G-布朗运动的伊藤型随机积分理论也得到较好的研究[3-5]. 值得注意的是,在 G-期望框架下,有许多的结论不同于线性期望理论,比如:控制收敛定理不成立,G-布朗运动的二次变差过程不是一个常数等等. 在此基础上,彭[1]和高[4]通过不动点定理证明了由 G-布朗运动驱动的正向随机微分方程的解的存在唯一性. 文献[6]证明了如下由 G-布朗运动驱动的倒向随机微分方程(GBSDE)存在唯一的解(Y,Z,K):

$$Y_t=\xi+\int_t^T f(s,Y_s,Z_s)\mathrm{d}s+\int_t^T g_{ij}(s,Y_s,Z_s)\mathrm{d}\langle B^i,B^j\rangle_s-\int_t^T Z_s\mathrm{d}B_s-(K_T-K_t),\tag{1}$$

式中,$\langle B^i,B^j\rangle_t$ 是 G-布朗运动 B_t 的交互变差过程,$\xi\in L_G^\beta(\Omega_T)$,$\beta\geqslant 2$.生成元$f$和 g_{ij}满足 Lipschitz 条件. 在此情形下,文献[7]得到生成元的表示定理(解的极限定理),并利用它得到了方程(1)的逆比较定理.

最近,文献[8]推广了文献[6]的结论,在生成元满足一致连续性条件时证明了方程(1)的解的存在唯一性. 然而,在此种情形下的解的极限定理,进一步,逆比较定理尚未得到研究. 本文研究了具有一致连续性生成元的 GBSDE 的解的极限定理,并由此得到了该方程的逆比较定理.

收稿日期:2021-02-21.

基金项目:国家自然科学基金项目(11601203、12171084、11801270)、江苏省“大规模复杂系统数值模拟”重点实验室项目(202003)、中央高校基本科研专项资金项目(Kyz201748、Y0201801249)、金陵科技学院校级孵化项目(Jit-fhxm-2021)、金陵科技学院博士启动基金项目(Jit-b-201836).

通讯作者:王丙均,博士,副教授,研究方向:随机微分方程. E-mail:wbj586@126.com

1　预备知识

取 $\Omega_T=C_0([0,T];\mathbf{R}^d)$ 为定义在 $[0,T]$ 上的 $\mathbf{R}^d$ 值连续路径 w_t 构成的空间，$w_0=0$，$B_t(w):=w_t$ 为典则过程.记 $\mathbf{F}:=\{\mathcal{F}_t\}$ 是 B_t 生成的自然域流. $Lip(\Omega_T):=\{\varphi(B_{t_1},B_{t_2},\cdots,B_{t_n}):\forall n\geqslant 1,t_1,t_2,\cdots,t_n\in[0,T],\forall\varphi\in C_{b,Lip}(\mathbf{R}^{n\times d})\}$，其中 $C_{b,lip}(\mathbf{R}^{n\times d})$ 是有界实值 Lipschitz 连续函数构成的空间. 可以证明在 $(\Omega_T,Lip(\Omega_T))$ 上存在一个 G-期望 $\hat{E}$，使得典则过程 $B_t(w)$ 是一个 G-布朗运动，$\hat{E}[B_1^2]=\overline{\sigma}^2$，$-\hat{E}[-B_1^2]=\underline{\sigma}^2$. 并且对 $\varphi\in C_{b,lip}(\mathbf{R}^d)$，$(t,x)\in\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^d$，$u(t,x):=\hat{E}[\varphi(x+\sqrt{t}B_1)]$ 是如下 PDE 的黏性解：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-G\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)=0,\\ u_{t_0}=\varphi(x),\end{cases}$$

式中，$G(\boldsymbol{A})=\dfrac{1}{2}\hat{E}[[\boldsymbol{A}B_1,B_1]]:\mathbf{S}_d\to\mathbf{R}$，$\mathbf{S}_d$ 是 $d\times d$ 的对称矩阵构成的集合.

对于 $p\geqslant 1$，记 $L_G^p(\Omega_T)$ 为 $Lip(\Omega_T)$ 在范数 $\|X\|_{p,G}:=(\hat{E}[|X|^p])^{1/p}$ 下的完备化空间. 空间 $H_G^p(0,T)$，$M_G^p(0,T)$ 的范数分别为 $\|X\|^p_{H_G^p(0,T)}:=\hat{E}\left[\left(\int_0^T|\eta_t|^2\mathrm{d}t\right)^{p/2}\right]$，$\|X\|^p_{M_G^p(0,T)}:=\hat{E}\left[\int_0^T|\eta_t|^p\mathrm{d}t\right]$. 由文献[9]，对 $\eta\in H_G^p(0,T)$，$p\geqslant 1$，可以定义伊藤积分 $\int_0^T\eta_s\mathrm{d}B_s$. 对 $\eta\in M_G^1(0,T)$，可以定义 $\int_0^T\eta_s\mathrm{d}\langle B^i,B^j\rangle_s$，$i,j=1,2,\cdots d$. 进一步，有

$$\underline{\sigma}^2\boldsymbol{I}_{d\times d}\mathrm{d}t\leqslant[\mathrm{d}\langle B^i,B^j\rangle_t]_{i,j=1}^d\leqslant\overline{\sigma}^2\boldsymbol{I}_{d\times d}\mathrm{d}t.\tag{2}$$

令 $S_G^0(0,T)=\{h(t,B_{t_1\wedge t},\cdots,B_{t_n\wedge t}):t,t_1,\cdots,t_n\in[0,T],h\in C_{b,lip}(\mathbf{R}^{(n+1)\times d})\}$. 对 $\eta\in S_G^0(0,T)$，$p\geqslant 1$，记 $S_G^p(0,T)$ 为 $S_G^0(0,T)$ 在范数 $\|X\|_{S_G^p(0,T)}:=\{\hat{E}[\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\eta_t|^p]\}^{1/p}$ 下的完备化空间.

引理 1[3]　记 $M(\Omega_T)$ 为 $(\Omega_T,\mathcal{F}_T)$ 上的概率测度的集合，则存在一个弱紧的子集 $\mathcal{P}\subset M(\Omega_T)$，使得对 $\xi\in L_G^1(\Omega_T)$，有 $\hat{E}[\xi]=\max_{P\in\mathcal{P}}E_P(\xi)$，这里 E_P 为概率测度 P 对应的线性期望.

定义容度 $c(A)=\sup_{P\in\mathcal{P}}P(A)$，$A\in\mathcal{F}_T$. 若 $c(A)=0$，则称集合 $A\subset\Omega_T$ 为极集.如果一个性质在一个极集外是成立的，则称之为是拟必然(q.s.)成立的.

记 $\mathcal{G}_G^\alpha(0,T)$ 为过程 (Y,Z,K) 所构成的集合，其中 $Y\in S_G^\alpha(0,T)$，$Z\in H_G^\alpha(0,T)$，K 是一个连续非增的 G-鞅，且 $K_0=0$，$K_T\in L_G^\alpha(\Omega_T)$.

2　解的估计

考虑 GBSDE(1)，其中 ξ，$f(t,y,z)$，$g_{ij}(t,y,z):[0,T]\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}^d\to\mathbf{R}$ 满足下列条件：

(H1) $\xi\in L_G^\beta(\Omega_T)$，$f(\cdot,y,z)$，$g_{ij}(\cdot,y,z)\in M_G^\beta(0,T)$，$\beta>2$；

(H2) 存在常数 $L>0$ 和连续非降，次可加的函数 $\phi:R^+\to R^+$，$\varphi(0)=0$，$\varphi(z)\leqslant L(1+|z|)$，使得 $|f(t,y,z)-f(t,y',z')|+|g_{ij}(t,y,z)-g_{ij}(t,y',z')|\leqslant L|y-y'|+\phi(|z-z'|)$；

(H3) $i\neq j$ 时 $g_{ij}\equiv 0$.

引理 3[8]　若(H1)-(H3)成立，则方程(1)存在惟一的一组解 $(Y,Z,K)\in\mathcal{G}_G^2(0,T)$.

利用和文献[6]中命题 3.5、命题 3.7 相同的方法，我们有如下估计.

引理 4　若(H1)-(H3)成立，则存在一个依赖于 $\underline{\sigma}^2$，$\overline{\sigma}^2$ 和 L 的常数 $C>0$，使得

$$\hat{E}[\sup_{t\leqslant s\leqslant T}|Y_s|^2]\leqslant C\left\{\hat{E}[|\xi|^\beta]+(T-t)^{\frac{\beta-2}{2}}\hat{E}\left[\int_t^T|f(s,0,0)|^\beta\mathrm{d}s\right]+(T-t)^{\frac{\beta}{2}}\right\},$$

$$\hat{E}\left[\int_t^T|Z_s|^2\mathrm{d}s\right]\leqslant C\left\{\hat{E}[\sup_{t\leqslant s\leqslant T}|Y_s|^2]+(T-t)\hat{E}\left[\int_t^T|f(s,0,0)|^2\mathrm{d}s\right]+(T-t)^2\right\}.$$

3　解的极限定理和逆比较定理

为简单起见，对每个 $t\in[0,T)$，$n\in\mathbf{N}$，记 $t_n=(t+1/n)\wedge T$.

考虑如下由 G-布朗运动驱动的正倒向随机微分方程:

$$X_s^{t,x}=x+\int_t^s b(X_u^{t,x})\mathrm{d}u+\int_t^s h_{ij}(X_u^{t,x})\mathrm{d}\langle B^i,B^j\rangle_u+\int_t^s \sigma(X_u^{t,x})\mathrm{d}B_u, \tag{3}$$

$$Y_s^{t,x,y,p}=y+\langle p,X_{t_n}^{t,x}-x\rangle+\int_s^{t_n} f(u,Y_u^{t,x,y,p},Z_u^{t,x,y,p})\mathrm{d}u+\int_s^{t_n} g_{ij}(u,Y_u^{t,x,y,p},Z_u^{t,x,y,p})\mathrm{d}\langle B^i,B^j\rangle_u-\int_s^{t_n} Z_u^{t,x,y,p}\mathrm{d}B_u-(K_{t_n}^{t,x,y,p}-K_s^{t,x,y,p}). \tag{4}$$

式中,参数满足下列条件:对于 $t\in[0,T)$,$x,x',p\in\mathbf{R}^n$,$y\in\mathbf{R}$,$z\in\mathbf{R}^d$,$2\leqslant\alpha<\beta$,

(H4)$t\to f(t,y,z)$,$g_{ij}(t,y,z)$是连续的;

(H5)$f(t,y,z)$,$g_{ij}(t,y,z)\in L_G^\beta(\Omega_t)$且

$$\lim_{n\to\infty}\hat{E}[n\int_t^{t_n}(|f(u,y,z)-f(t,y,z)|^\alpha+|g_{ij}(u,y,z)-g_{ij}(t,y,z)|^\alpha)\mathrm{d}u]=0;$$

(H6)$b,h_{ij}:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$,$\sigma:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^{n\times d}$,$b,h_{ij},\sigma\in M_G^\beta(0,T)$且满足 Lipschitz 条件:

$$|b(x)-b(x')|\vee|h_{ij}(x)-h_{ij}(x')|\vee|\sigma(x)-\sigma(x')|\leqslant L|x-x'|.$$

由文献[1]和(H6),方程(3)存在惟一的解 $X_t\in S_G^\beta(0,T)$,并且有

$$\hat{E}[\sup_{t\leqslant u\leqslant s}|X_u-x|^\alpha]\leqslant C(1+|x|^\alpha)(s-t)^{\frac{\alpha}{2}}.$$

由(H1)-(H3)和引理 3,显然方程(4)存在唯一解$(Y^{t,x,y,p},Z^{t,x,y,p},K^{t,x,y,p})\in\mathcal{G}_G^2(0,T)$.

对$\forall t\in[0,T]$,$y\in\mathbf{R}$,$z\in\mathbf{R}^d$,$n\in\mathbf{N}$,记

$$\underline{\varphi}_n(t,y,z)=\inf_{q\in\mathbf{Q}^d}\{\varphi(t,y,q)+n|z-q|\}-\varphi(t,0,0),$$

$$\overline{\varphi}_n(t,y,z)=\sup_{q\in\mathbf{Q}^d}\{\varphi(t,y,q)-n|z-q|\}-\varphi(t,0,0).$$

引理 5[10] 假设 $\varphi(t,y,z):=f,g_{ij}$满足(H2),则对于$\forall t\in[0,T]$,$y,y'\in\mathbf{R}$,$z,z'\in\mathbf{R}^d$,下列性质成立:

(1)$-L(1+|y|+|z|)\leqslant\underline{\varphi}_n(t,y,z)\leqslant\varphi(t,y,z)-\varphi(t,0,0)\leqslant\overline{\varphi}_n(t,y,z)\leqslant L(1+|y|+|z|)$;

(2) $|\underline{\varphi}_n(t,y,z)-\underline{\varphi}_n(t,y',z)|\vee|\overline{\varphi}_n(t,y,z)-\overline{\varphi}_n(t,y',z)|\leqslant L|y-y'|$,
$|\underline{\varphi}_n(t,y,z)-\underline{\varphi}_n(t,y,z')|\vee|\overline{\varphi}_n(t,y,z)-\overline{\varphi}_n(t,y,z')|\leqslant n|z-z'|$;

(3)如果$(y_n,z_n)\to(y,z)$,则

$$\underline{\varphi}_n(t,y_n,z_n)\to\varphi(t,y,z)-\varphi(t,0,0),\quad \overline{\varphi}_n(t,y_n,z_n)\to\varphi(t,y,z)-\varphi(t,0,0);$$

(4)$\underline{\varphi}_\cdot(t,y,z)$是非减函数,$\overline{\varphi}_\cdot(t,y,z)$是非增函数;

(5)$0\leqslant\varphi(t,y,z)-\varphi(t,0,0)-\underline{\varphi}_n(t,y,z)\leqslant\phi\left(\frac{2L}{n-L}\right)$,$0\leqslant\overline{\varphi}_n(t,y,z)-\varphi(t,y,z)+\varphi(t,0,0)\leqslant\phi\left(\frac{2L}{n-L}\right)$.

引理 6 若f,g_{ij}满足(H1)-(H3),则对 $t\in[0,T]$,$y,\bar{y}\in\mathbf{R}$,$z,\bar{z}\in\mathbf{R}^d$,存在一列非负过程$\{\psi^n(t,y,z)\}_{n=1}^\infty$使得 $\psi^n(t,y,z)\leqslant2\phi\left(\frac{2L}{n-L}\right)$且

$$|f(t,\bar{y},\bar{z})-f(t,y,z)|\vee|g_{ij}(t,\bar{y},\bar{z})-g_{ij}(t,y,z)|\leqslant L|\bar{y}-y|+n|\bar{z}-z|+\psi^n(t,y,z).$$

证明 只证明该引理对f成立,类似的讨论对于 g_{ij}同样成立.由(H2)和引理 5,可得

$$f(t,\bar{y},\bar{z})-f(t,y,z)=f(t,\bar{y},\bar{z})-f(t,y,\bar{z})+f(t,y,\bar{z})-f(t,y,z)\leqslant L|\bar{y}-y|+n|\bar{z}-z|+\bar{f}_n(t,y,z)+f(t,0,0)-f(t,y,z),\ f(t,\bar{y},\bar{z})-f(t,y,z)=f(t,\bar{y},\bar{z})-f(t,y,\bar{z})+f(t,y,\bar{z})-f(t,y,z)\geqslant -L|\bar{y}-y|-n|\bar{z}-z|+\bar{f}_n(t,y,z)+f(t,0,0)-f(t,y,z),$$

式中,$\bar{f}_n(t,y,z)$和$\bar{f}_n(t,y,z)$是引理 5 中定义的序列. 令

$$\psi^n(t,y,z)=|\bar{f}_n(t,y,z)+f(t,0,0)-f(t,y,z)|+|\bar{f}_n(t,y,z)+f(t,0,0)-f(t,y,z)|,$$

则有

$$|f(t,\bar{y},\bar{z})-f(t,y,z)|\leqslant L|\bar{y}-y|+n|\bar{z}-z|+\psi^n(t,y,z).$$

由引理 5,易得 $\psi^n(t,y,z)\leqslant2\phi\left(\frac{2L}{n-L}\right)$.

定理 1 若 b,h_{ij},σ,f,g_{ij}满足条件(H1)-(H6),则在 $L_G^2(\Omega_T)$中,方程(4)的解满足

$$\lim_{n\to\infty} n(Y_t^{t,x,y,p}-y)=f(t,y,\sigma^T(x)p)+\langle p,b(x)\rangle+2G((g_{ij}(t,y,\sigma^T(x)p)+\langle p,h_{ij}(x)\rangle)_{i,j=1}^d).$$

证明　为简单起见,记$(Y^{t,x,y,p},Z^{t,x,y,p},K^{t,x,y,p})$和$X^{t,x}$分别为$(Y,Z,K)$和$X$. 对$s\in[t,t_n]$,令$\tilde{Y}_s=Y_s-(y+[p,X_s-x])$, $\tilde{Z}_s=Z_s-\sigma^T(X_s)p$, $\tilde{K}_s=K_s$.容易验证$(\tilde{Y},\tilde{Z},\tilde{K})$是如下方程的解:

$$\tilde{Y}_s=\int_s^{t_n} f(u,\tilde{Y}_u+y+\langle p,X_u-x\rangle,\tilde{Z}_u+\sigma^T(X_u)p)\,\mathrm{d}u+\int_s^{t_n}\langle p,b(X_u)\rangle\mathrm{d}u+\int_s^{t_n} g_{ij}(u,\tilde{Y}_u+y+\langle p,X_u-x\rangle,\tilde{Z}_u+\sigma^T(X_u)p)\,\mathrm{d}\langle B^i,B^j\rangle_u+\int_s^{t_n}\langle p,h_{ij}(X_u)\rangle\mathrm{d}\langle B^i,B^j\rangle_u-\int_s^{t_n}\tilde{Z}_u\mathrm{d}B_u-(\tilde{K}_{t_n}-\tilde{K}_s).\tag{5}$$

利用和引理 4 相同的讨论方法,对于$\beta>2$,存在一个依赖$L,\bar{\sigma}^2,\underline{\sigma}^2,|p|$的常数$C$使得下式成立:

$$\hat{E}[\sup_{t\leqslant s\leqslant t_n}|\tilde{Y}_s|^2]\leqslant C\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{\beta-2}{2}}\hat{E}[\int_t^{t_n}(|f(s,0,0)|^\beta+|g_{ij}(s,0,0)|^\beta)\mathrm{d}s]+\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{\beta}{2}}+\hat{E}[\sup_{t\leqslant u\leqslant t_n}|X_u-x|^\beta]\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{\beta}{2}}\right\}\leqslant C\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{\beta-2}{2}}\hat{E}\left[\int_t^{t_n}(|f(s,0,0)|^\beta+|g_{ij}(s,0,0)|^\beta)\mathrm{d}s\right]+\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{\beta}{2}}+(1+|x|^\beta)\left(\frac{1}{n}\right)^{\beta}\right\},\tag{6}$$

$$\hat{E}\left[\int_t^{t_n}|\tilde{Z}_s|^2\mathrm{d}s\right]\leqslant C\left\{\hat{E}[\sup_{t\leqslant s\leqslant t_n}|\tilde{Y}_s|^2]+\frac{1}{n}\hat{E}\left[\int_t^{t_n}(|f(s,0,0)|^2+|g_{ij}(s,0,0)|^2)\mathrm{d}s\right]+\frac{1}{n^2}+(1+|x|^2)\frac{1}{n^3}\right\}.$$

在(5)中取$s=t$,取条件G-期望,结合$\{K_t\}_{0\leqslant t\leqslant T}$是$G$-鞅,有

$$n(Y_t-y)=n\tilde{Y}_t=n\hat{E}_t[\tilde{Y}_t+\tilde{K}_{t_n}-\tilde{K}_t]=n\hat{E}_t\left[\int_t^{t_n} f(t,y,\sigma^T(x)p)\,\mathrm{d}u+\int_t^{t_n}\langle p,b(x)\rangle\mathrm{d}u+\int_t^{t_n} g_{ij}(t,y,\sigma^T(x)p)\,\mathrm{d}\langle B^i,B^j\rangle_u+\int_t^{t_n}\langle p,h_{ij}(x)\rangle\mathrm{d}\langle B^i,B^j\rangle_u\right]+L_n+M_n+N_n,\tag{7}$$

式中,

$$L_n=n\left\{\hat{E}_t\left[\int_t^{t_n} f(u,\tilde{Y}_u+y+\langle p,X_u-x\rangle,\tilde{Z}_u+\sigma^T(X_u)p)+\int_t^{t_n}\langle p,b(X_u)\rangle\mathrm{d}u+\int_t^{t_n} g_{ij}(u,\tilde{Y}_u+y+\langle p,X_u-x\rangle,\tilde{Z}_u+\sigma^T(X_u)p)\,\mathrm{d}\langle B^i,B^j\rangle_u+\int_t^{t_n}\langle p,h_{ij}(X_u)\rangle\mathrm{d}\langle B^i,B^j\rangle_u\right]-E_t\left[\int_t^{t_n} f(u,y+\langle p,X_u-x\rangle,\sigma^T(X_u)p)+\int_t^{t_n}\langle p,b(X_u)\rangle du+\int_t^{t_n} g_{ij}(u,y+\langle p,X_u-x\rangle,\sigma^T(X_u)p)\,\mathrm{d}\langle B^i,B^j\rangle_u+\int_t^{t_n}\langle p,h_{ij}(X_u)\rangle\mathrm{d}\langle B^i,B^j\rangle_u\right]\right\},$$

$$M_n=n\left\{\hat{E}_t\left[\int_t^{t_n} f(u,y+\langle p,X_u-x\rangle,\sigma^T(X_u)p)+\int_t^{t_n}\langle p,b(X_u)\rangle\mathrm{d}u+\int_t^{t_n} g_{ij}(u,y+\langle p,X_u-x\rangle,\sigma^T(X_u)p)\,\mathrm{d}\langle B^i,B^j\rangle_u+\int_t^{t_n}\langle p,h_{ij}(X_u)\rangle\mathrm{d}\langle B^i,B^j\rangle_u\right]-\hat{E}_t\left[\int_t^{t_n} f(u,y,\sigma^T(x)p)+\int_t^{t_n}\langle p,b(x)\rangle\mathrm{d}u+\int_t^{t_n} g_{ij}(u,y,\sigma^T(x)p)\,\mathrm{d}\langle B^i,B^j\rangle_u+\int_t^{t_n}\langle p,h_{ij}(x)\rangle\mathrm{d}\langle B^i,B^j\rangle_u\right]\right\},$$

$$N_n=n\left\{\hat{E}_t\left[\int_t^{t_n} f(u,y,\sigma^T(x)p)+\int_t^{t_n}\langle p,b(x)\rangle\mathrm{d}u+\int_t^{t_n} g_{ij}(u,y,\sigma^T(x)p)\,\mathrm{d}\langle B^i,B^j\rangle_u+\int_t^{t_n}\langle p,h_{ij}(x)\rangle\mathrm{d}\langle B^i,B^j\rangle_u\right]-\hat{E}_t\left[\int_t^{t_n} f(t,y,\sigma^T(x)p)+\int_t^{t_n}\langle p,b(x)\rangle\mathrm{d}u+\int_t^{t_n} g_{ij}(t,y,\sigma^T(x)p)\,\mathrm{d}\langle B^i,B^j\rangle_u+\int_t^{t_n}\langle p,h_{ij}(x)\rangle\mathrm{d}\langle B^i,B^j\rangle_u\right]\right\}.$$

接下来,我们将说明在空间$L_G^2(\Omega_T)$中,当$n\to\infty$时,$L_n,M_n,N_n\to 0$.

由(2)和引理 6 可知,存在一个非负的序列$\psi^k(u)$,$k\in N$,使得

$$L_n \leqslant n(1+\bar{\sigma}^2)\hat{E}_t[\int_t^{t_n}(L|\tilde{Y}_u|+k|\tilde{Z}_u|+\psi^k(u))\mathrm{d}u].$$

由赫尔德不等式和引理 6,两边取 G-期望,可得

$$\hat{E}[|L_n|^2] \leqslant n^2(1+\bar{\sigma}^2)^2\hat{E}[|\int_t^{t_n}(L|\tilde{Y}_u|+k|\tilde{Z}_u|+\psi^k(u))\mathrm{d}u|^2] \leqslant 3L^2(1+\bar{\sigma}^2)^2\hat{E}[\sup_{t\leqslant s\leqslant t_n}|\tilde{Y}_s|^2]+$$

$$3nk^2(1+\bar{\sigma}^2)^2\hat{E}[\int_t^{t_n}|\tilde{Z}_s|^2\mathrm{d}s]+12(1+\bar{\sigma}^2)^2\phi^2\left(\frac{2L}{k-L}\right).$$

由(6),对于 $\beta>2$,存在一个依赖于 $\bar{\sigma}^2$ 和 L 的常数 C,使得

$$\hat{E}[|L_n|^2] \leqslant C\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{\beta}{2}-1}\hat{E}[\int_t^{t_n}(|f(s,0,0)|^\beta+|g_{ij}(s,0,0)|^\beta)\mathrm{d}s]+\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{\beta}{2}}+(1+|x|^\beta)\left(\frac{1}{n}\right)^{\beta}\right\}+$$

$$Ck^2\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{\beta}{2}-1}n\hat{E}[\int_t^{t_n}(|f(s,0,0)|^\beta+|g_{ij}(s,0,0)|^\beta)\mathrm{d}s]+\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{\beta}{2}-1}+(1+|x|^\beta)\left(\frac{1}{n}\right)^{\beta-1}\right\}+$$

$$Ck^2\left\{\hat{E}[\int_t^{t_n}(|f(s,0,0)|^2+|g_{ij}(s,0,0)|^2)\mathrm{d}s]+\frac{1}{n}+(1+|x|^2)\frac{1}{n^2}\right\}+C\phi^2\left(\frac{2L}{k-L}\right). \tag{8}$$

注意到对于 $\alpha\geqslant 2,\rho=f,g_{ij}$,有

$$n\int_t^{t_n}|\rho(s,0,0)|^\alpha\mathrm{d}s \leqslant 2^{\alpha-1}\left[n\int_t^{t_n}|\rho(s,0,0)-\rho(t,0,0)|^\alpha\mathrm{d}s+n\int_t^{t_n}|\rho(t,0,0)|^\alpha\mathrm{d}s\right] \leqslant$$

$$2^{\alpha-1}\left[n\int_t^{t_n}|\rho(s,0,0)-\rho(t,0,0)|^\alpha\mathrm{d}s+|\rho(t,0,0)|^\alpha\right].$$

结合式(8)可得

$$\hat{E}[|L_n|^2] \leqslant C\frac{2}{n^{\frac{\beta}{2}}}\left\{n\hat{E}[\int_t^{t_n}(|\rho(s,0,0)-\rho(t,0,0)|^\beta\mathrm{d}s]+\hat{E}[|\rho(t,0,0)|^\beta)]+1+(1+|x|^\beta)\frac{1}{n^{\frac{\beta}{2}}}\right\}+$$

$$Ck^2\frac{2}{n^{\frac{\beta}{2}-1}}\left\{n\hat{E}[\int_t^{t_n}(|\rho(s,0,0)-\rho(t,0,0)|^\beta\mathrm{d}s]+\hat{E}[|\rho(t,0,0)|^\beta)]+1+(1+|x|^\beta)\frac{1}{n^{\frac{\beta}{2}}}\right\}+$$

$$Ck^2\frac{2}{n}\left\{n\hat{E}[\int_t^{t_n}(|\rho(s,0,0)-\rho(t,0,0)|^2\mathrm{d}s]+\hat{E}[|\rho(t,0,0)|^2)]+1+(1+|x|^2)\frac{1}{n}\right\}+C\phi^2\left(\frac{2L}{k-L}\right).$$

由(H5)和(H2),先令 $n\to\infty$,再令 $k\to\infty$,易得

$$\hat{E}[|L_n|^2]\to 0. \tag{9}$$

利用和上面相同的分析方法,有

$$M_n \leqslant n(1+\bar{\sigma}^2)\hat{E}_t\left[\int_t^{t_n}L\langle p,X_u-x\rangle+k(\sigma^T(X_u)-\sigma^T(x))p+\psi^k(u)\mathrm{d}u+\int_t^{t_n}(\langle p,b(X_u)-b(x)\rangle+\right.$$

$$\left.\langle p,h_{ij}(X_u)-h_{ij}(x)\rangle)\mathrm{d}u\right] \leqslant n(1+\bar{\sigma}^2)\hat{E}_t\left[(3+k)L|p|\int_t^{t_n}|X_u-x|\mathrm{d}u+\int_t^{t_n}\psi^k(u)\mathrm{d}u\right].$$

故有

$$\hat{E}[|M_n|^2] \leqslant 2n^2(1+\bar{\sigma}^2)^2\left\{(3+k)^2L^2|p|^2\hat{E}[\sup_{t\leqslant s\leqslant t_n}|X_s-x|^2]\frac{1}{n^2}+\phi^2\left(\frac{2L}{k-L}\right)\frac{1}{n^2}\right\} \leqslant$$

$$C(1+\bar{\sigma}^2)^2\left\{(3+k)^2L^2|p|^2(1+|x|^2)\frac{1}{n}+\phi^2\left(\frac{2L}{k-L}\right)\right\}.$$

故令 $n\to\infty$,再令 $k\to\infty$,有

$$\hat{E}[|M_n|^2]\to 0. \tag{10}$$

接下来,我们讨论序列 $\{N_n\}_{n\in N}$ 的收敛性. 由(3),可得

$$\hat{E}[|N_n|^2] \leqslant n\hat{E}\left[\int_t^{t_n}|f(u,y,\sigma^T(x)p)-f(t,y,\sigma^T(x)p)|^2\mathrm{d}u\right]+$$

$$n\bar{\sigma}^2\hat{E}[\int_t^{t_n}|g_{ij}(u,y,\sigma^T(x)p)-g_{ij}(t,y,\sigma^T(x)p)|^2\mathrm{d}u].$$

由(H5)可得,当 $n\to\infty$ 时,有

$$\hat{E}[|N_n|^2]\to 0. \tag{11}$$

另外一方面,由于

$$\hat{E}_t\left[\int_t^{t_n} f(t,y,\boldsymbol{\sigma}^T(x)p)\mathrm{d}u+\int_t^{t_n}\langle p,b(x)\rangle\mathrm{d}u+\int_t^{t_n} g_{ij}(t,y,\boldsymbol{\sigma}^T(x)p)\mathrm{d}\langle B^i,B^j\rangle_u+\int_t^{t_n}\langle p,h_{ij}(x)\rangle\mathrm{d}\langle B^i,B^j\rangle_u\right]=$$

$$\frac{1}{n}[f(t,y,\boldsymbol{\sigma}^T(x)p)+\langle p,b(x)\rangle]+\hat{E}_t[(g_{ij}(t,y,\boldsymbol{\sigma}^T(x)p)+\langle p,h_{ij}(x)\rangle)(\langle B^i,B^j\rangle_{t_n}-\langle B^i,B^j\rangle_t)]=$$

$$\frac{1}{n}[f(t,y,\boldsymbol{\sigma}^T(x)p)+\langle p,b(x)\rangle+2G((g_{ij}(t,y,\boldsymbol{\sigma}^T(x)p)+\langle p,h_{ij}(x)\rangle)_{i,j=1}^d)]$$

结合(9)-(11),可得在 $L_G^2(\Omega_T)$ 中,

$$\lim_{n\to\infty} n(Y_t-y)=f(t,y,\boldsymbol{\sigma}^T(x)p)+\langle p,b(x)\rangle+2G((g_{ij}(t,y,\boldsymbol{\sigma}^T(x)p)+\langle p,h_{ij}(x)\rangle)_{i,j=1}^d).$$

接下来,我们讨论方程(1)的逆比较定理.

定理 2　对于满足条件(H1)-(H6)的 ξ, f^l, g_{ij}^l, $l=1,2$, $\beta>2$,若对于每个 $t\in[0,T]$ 和 $\xi\in L_G^\beta(\Omega_T)$,方程(1)的解 $(Y^{l,\xi},Z^{l,\xi},K^{l,\xi})$ 满足

$$Y_t^{1,\xi}>Y_t^{2,\xi}, \tag{12}$$

则有 $f^2-f^1+2G((g_{ij}^2-g_{ij}^1)_{i,j=1}^d)\leqslant 0$,　$q.s.$.

证明　对给定的 $(t,y,z)\in[0,T)\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}^d$,考虑

$$\xi:=y+\langle z,h_{ij}\rangle(\langle B^i,B^j\rangle_{t_n}-\langle B^i,B^j\rangle_t)+\langle z,B_{t_n}-B_t\rangle.$$

即在方程(3)中取 $b=0,p=z,\sigma=\boldsymbol{I}_{d\times d}$. 故由定理 1,在 $L_G^2(\Omega_T)$ 中,有

$$\lim_{n\to\infty} n(Y_t^{l,\xi}-y)=f^l(t,y,z)+2G((g_{ij}^l(t,y,z)+\langle z,h_{ij}(x)\rangle)_{i,j=1}^d).$$

由文献[11]的引理 4 可知,存在一个子列 n_k 使得当 $n_k\to\infty$ 时,有

$$n_k(Y_t^{l,\xi}-y)\to f^l(t,y,z)+2G((g_{ij}^l(t,y,z)+\langle z,h_{ij}(x)\rangle)_{i,j=1}^d),\quad q.s..$$

由条件(12)可知,对于 $t\in[0,T]$,有

$$f^1(t,y,z)+2G((g_{ij}^1(t,y,z)+\langle z,h_{ij}(x)\rangle)_{i,j=1}^d)\geqslant f^2(t,y,z)+2G((g_{ij}^2(t,y,z)+\langle z,h_{ij}(x)\rangle)_{i,j=1}^d).$$

选择一个 h_{ij} 使得 $\langle z,h_{ij}(x)\rangle=-g_{ij}^1(t,y,z)$,从而有

$$\{f^2-f^1+2G((g_{ij}^2-g_{ij}^1)_{i,j=1}^d)\}(t,y,z)\leqslant 0,\quad q.s..$$

最后,由(H2)和(H4)易得

$$f^2-f^1+2G((g_{ij}^2-g_{ij}^1)_{i,j=1}^d)\leqslant 0,\quad q.s..$$

[参考文献]

[1] PENG S. Nonlinear expectations and stochastic calculus under uncertainly. With robust CLT and *G*-Brownian motion[EB/OL]. Probability Theory and Stochastic Modelling,95. Springer,Berlin(2019). Xiii+212 pp. ISBN:978-3-662-59902-0;978-3-662-59903-7 60-02(39A50 60-01 60Fxx 60Hxx).

[2] PENG S. *G*-expectation,*G*-Brownian motion and realted stochastic calculus of Itô type[C]//Stochastic Analysis and Applications. Abel Symposium,Springer,Berlin,2007,2:541-567.

[3] DENIS L,HU M,PENG S. Function spaces and capacity related to a sublinear expectation:application to *G*-Brownain motion paths[J]. Potential Anal.,2011,34:139-161.

[4] GAO F Q. Pathwise properties and homeomorphic flows for stochastic differential equations driven by *G*-Brownian motion[J]. Stochastic Process. Appl.,2009,119:3356-3382.

[5] HU M,WANG F,ZHENG G. Quasi-continuous random variables and processes under the *G*-expectation framework[J]. Stochastic Process. Appl.,2016,126:2367-2387.

[6] HU M,JI S,PENG S,SONG Y. Backward stochastic differential equation driven by *G*-Brownian motion[J]. Stochastic Process. Appl.,2014,124:759-784.

[7] HEAND K,HU M. Represnetation theorem for generators of BSDEs driven by *G*-Brownian motion and its applications[J]. Abstr. Appl. Anal.,2013,1:1-10.

[8] WANG F,ZHENG G. Backward stochastic differential equations driven by *G*-Brownian motion with uniformly continuous generators[J],J. Theoret. Probab.,2020,Doi:10.1007/s10959-020-00998-y.

[9] LI X,PENG S. Stopping times and related Ito'scalculus with *G*-Brownian motion[J]. Stochastic Process. Appl.,2011,121:

1492-1508.

[10] LEPELTIER J,SAN MARTIN J. Backward stochastic differential equations with continuous coefficients[J]. Statist. Probab. Lett.,1997,34:425-430.

[11] GENG X,QIAN Z,YANG D. *G*-Brownian motion as rough paths and differential equations driven by *G*-Brownian motion[M]. Sminaire de Probabilits XLVI. Cham,Heidelberg,New York,Dordrecht London:Springer,2014:125-193.(eBook)

［责任编辑:陆炳新］

(上接第 10 页)

[10] KIM K H,JUN Y B. Intuitionistic fuzzy ideals of semigroups[J]. Indian journal of pure and applied mathematics,2002,33:443-449.

[11] KUROKI N. Fuzzy generalized bi-ideals in semigroups[J]. Information sciences,1992,66:235-243.

[12] LAJOS S,JUN Y B. On fuzzy(1,2)-ideals of semigroups[J]. Pure mathematics and applications,1997,8:335-338.

[13] DIB K A,GALHUM N. Fuzzy ideals and fuzzy bi-ideals in fuzzy semigroups[J]. Fuzzy sets and systems,1997,92:103-111.

[14] HONG S M,JUN Y B,MENG J. Fuzzy interior ideals in semigroups[J]. Indian journal of pure and applied mathematics,1995,26:859-863.

[15] HONG Y,FANG X. Characterizing intraregular semigroups by intuitionistic fuzzy sets[J]. Mathware and soft computing,2005,12:121-128.

［责任编辑:陆炳新］