doi:10.3969/j.issn.1001-4616.2023.03.005

含有有限项的 Hardy-Littlewood-Pólya 不等式

黄 红[1],袁俊丽[2]

(1.南京师范大学中北学院,江苏 镇江 212334)
(2.无锡学院理学院,江苏 无锡 214000)

[摘要] 本文证明了含有有限项的 Hardy-Littlewood-Pólya 不等式,并借助其极值函数满足的 Euler-Lagrange 方程组,估计这个不等式最佳常数的上下界.

[关键词] Hardy-Littlewood-Pólya 不等式,上下界估计,最佳常数
[中图分类号]O178 [文献标志码]A [文章编号]1001-4616(2023)03-0026-05

Hardy-Littlewood-Pólya Inequality Containing Finite Terms

Huang Hong[1],Yuan Junli[2]

(1.Zhongbei College,Nanjing Normal University,Zhenjiang 212334,China)
(2.College of Science,Wuxi University,Wuxi 214000,China)

Abstract: We prove Hardy-Littlewood-Pólya inequality containing finite terms. The authors also give the estimates of the upper and the lower bounds of the best constant with the help of the Euler-Lagrange equations, which is satisfied by extreme functions of Hardy-Littlewood-Pólya inequality.

Key words: Hardy-Littlewood-Pólya inequality, estimates of the upper and the lower bounds, best constant

1 引言及主要结论

设 $a_i,b_i\geqslant 0(i=1,2,\cdots)$,Hardy-Littlewood-Pólya 不等式如下:(参看[1]中 288 页的定理 381)

$$\sum_{i,j=1,i\neq j}^{\infty}\frac{a_ib_j}{|i-j|^{\lambda}}\leqslant K_{p,q}\Big(\sum_{i=1}^{\infty}a_i^p\Big)^{1/p}\Big(\sum_{i=1}^{\infty}b_i^q\Big)^{1/q}, \tag{1}$$

其中,$\min\{p,q\}>1,1/p+1/q>1,\lambda=2-(1/p+1/q)$. 此外,如下的积分不等式成立(也就是 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式参看[2]):

$$\iint\limits_{R^nR^n}\frac{f(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{|x-y|^{\lambda}}\leqslant C(p,q,\lambda)\ \|f\|_{L^p(\mathbf{R}^n)}\ \|g\|_{L^q(\mathbf{R}^n)},\ \forall\,(f,g)\in L^p(\mathbf{R}^n)\times L^q(\mathbf{R}^n), \tag{2}$$

其中,$n\geqslant 1,0<\lambda<n,\min\{p,q\}>1$,且 $1/p+1/q+\lambda/n=2$. 当 $p=q$ 时,Lieb 在[2]中得到了极值函数的表达式. 当 $p\neq q$ 时,极值函数满足以下积分方程组:

$$\begin{cases}u(x)=\displaystyle\int_{R^n}\frac{v^s(y)}{|x-y|^{\lambda}}\mathrm{d}y,\\ v(x)=\displaystyle\int_{R^n}\frac{u^t(y)}{|x-y|^{\lambda}}\mathrm{d}y,\end{cases} \tag{3}$$

其中,$s=(q-1)^{-1},t=(p-1)^{-1}$,且 $u=c_1f^{p-1},v=c_2g^{q-1},c_1,c_2$ 均为大于 0 的常数. 虽然极值函数的表达式并不知道,但(3)正解的存在性结果是成立的(参看[3]),并且这些解在 $\mathbf{R}^n$ 内关于某些点是径向对称和递减的(参看[4]). 另外,[5]和[6]中分别得到了其可积性与快速衰减率. 2011 年,Li and Villavert 证明了下

收稿日期:2023-04-24.
基金项目:国家自然科学基金项目(11871278)、无锡学院人才启动项目(550221025).
通讯作者:袁俊丽,博士,副教授,研究方向:偏微分方程及应用. E-mail:860166@cwxu.edu.cn

述含有限项的 Hardy-Littlewood-Pólya 不等式(参看[7]):

$$\sum_{i,j=1,i\neq j}^{N}\frac{a_ib_j}{|i-j|}\leqslant K_N\left(\sum_{i=1}^{N}a_i^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{N}b_i^2\right)^{1/2},\tag{4}$$

其中常数估计如下:

$$2\ln N-2\leqslant K_N\leqslant 2(\ln N-\ln 2)+2.$$

文献[8]中得到了更高维的结果. 最佳常数的上下界估计将有助于更好地理解描述电子气和多体系统的 Thomas-Fermi 模型中的库仑能量(参看[9]). 2015 年,Huang 等在文献[10]中运用 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式,将(1)推广到了更高维的情况:

$$\sum_{i,j\in\mathbf{Z}^n,i\neq j}\frac{|f_i||g_j|}{|i-j|^{\lambda}}\leqslant C\,\|f\|_{l^p}\,\|g\|_{l^q},\ \forall\,(f,g)\in l^p(\mathbf{Z}^n)\times l^q(\mathbf{Z}^n),\tag{5}$$

其中,$n\geqslant1$,$f=(f_i)_{i\in\mathbf{Z}^n}$,$g=(g_j)_{j\in\mathbf{Z}^n}$,$0<\lambda<n$,$\min\{p,q\}>1$,且 $1/p+1/q+\lambda/n\geqslant2$. 另外,他们证明了最佳常数可被含有有限项的泛函逼近. 当 $n=1$ 时,用 N 替换 $\mathbf{Z}^n$,定义最佳常数如下:

$$L_{p,q,\lambda}:=\sup\left\{\sum_{i,j=1,i\neq j}^{\infty}\frac{|f_i\|g_j|}{|i-j|^{\lambda}};\ \|f\|_{l^p}=\|g\|_{l^q}=1\right\}.\tag{6}$$

和上述 K_N 的估计不同,(5)的最佳常数的估计是不依赖于 N 的(参看[10]).

本文总是假设 $n=1$,且 $a_i,b_i\geqslant0\,(i=1,2,\cdots,N)$. 类似于文献[7],我们来证明含有限项的 Hardy-Littlewood-Pólya 不等式,并估计这个不等式最佳常数的上下界.

定理 1　假设 $\lambda>0$,且 $\min\{p,q\}>1$,那么存在一个只依赖于 p,q,λ,N 的常数 $L>0$,满足

$$\sum_{i,j=1,i\neq j}^{N}\frac{a_ib_j}{|i-j|^{\lambda}}\leqslant L\left(\sum_{i=1}^{N}a_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{N}b_i^q\right)^{1/q}.\tag{7}$$

定义(7)中的常数如下:

$$L_{p,q,\lambda,N}:=\max\left\{\sum_{i,j=1,i\neq j}^{N}\frac{a_ib_j}{|i-j|^{\lambda}};\ \sum_{i=1}^{N}a_i^p=\sum_{i=1}^{N}b_i^q=1\right\}.\tag{8}$$

定理 2　假设 $\lambda>0$,且 $\min\{p,q\}>1$. 令 $Q:=\max\{p,q\}$. 那么,当 $Q\in(1,2]$ 时,有

$$L_{p,q,\lambda,N}\leqslant\begin{cases}2(\log N+1-\log 2) & \lambda=1;\\ 2(1-\lambda)^{-1}[(N+1)^{1-\lambda}-1] & \lambda>0\text{ 且 }\lambda\neq1.\end{cases}\tag{9}$$

当 $Q>2$ 时,有

$$L_{p,q,\lambda,N}\leqslant\begin{cases}2N^{1-2/Q}(\log N+1-\log 2) & \lambda=1;\\ 2N^{1-2/Q}(1-\lambda)^{-1}[(N+1)^{1-\lambda}-1] & \lambda>0\text{ 且 }\lambda\neq1.\end{cases}\tag{10}$$

此外,当 $0<\lambda<1$ 且 $1/p+1/q+\lambda\geqslant2$ 时,可以得到更好的上界:

$$L_{p,q,\lambda,N}\leqslant L_{p,q,\lambda}.\tag{11}$$

$$\text{另一方面},L_{p,q,\lambda,N}\geqslant\max\{1,g(N)\},\tag{12}$$

其中,

$$g(N):=\begin{cases}\dfrac{2}{N^{1/p+1/q}}\dfrac{1}{\lambda-1}\left[(N-1)-\dfrac{1}{2-\lambda}(N^{2-\lambda}-1)\right] & \lambda\neq1,2;\\ \dfrac{2}{N^{1/p+1/q}}[(N-1)-\log N] & \lambda=2;\\ \dfrac{2}{N^{1/p+1/q}}[N\log N-(N-1)] & \lambda=1.\end{cases}$$

注 1　根据文献[10]中的引理 2.2,当 $0<\lambda<1$ 且 $1/p+1/q+\lambda\geqslant2$ 时,可得 $L_{p,q,\lambda,N}\to L_{p,q,\lambda}\,(N\to\infty)$.

2　定理 1 的证明

定理 1 的证明

令 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_N)$,$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_N)$. 设

$$J(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\sum_{i,j=1,i\neq j}^{N}\frac{a_i b_j}{|i-j|^{\lambda}}-L_{p,q,\lambda,N}\left(\sum_{i=1}^{N}a_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{N}b_i^q\right)^{1/q}.$$

显然,$J(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\leqslant 0$,对任意的 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\mathbf{R}_+^N$. 由于

$$\mathbf{S}(N):=\left\{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b});\sum_{i=1}^{N}a_i^p=\sum_{i=1}^{N}b_i^q=1\right\}$$

在 $\mathbf{R}_+^N\times\mathbf{R}_+^N$ 中是紧的,(8)在 $\mathbf{S}(N)$ 中有解. 于是,可得 J 的一个最大元:

$$(a(N),b(N))\in\mathbf{S}(N).$$

因此,对任意的 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\in\mathbf{R}_+^N\times\mathbf{R}_+^N$ 且 $t\in\mathbf{R}$,得

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}J(a(N)+t\boldsymbol{a},b(N))\right]_{t=0}=\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}J(a(N),b(N)+t\boldsymbol{b})\right]_{t=0}=0.$$

即

$$\begin{cases}L_{p,q,\lambda,N}a(N)_i^{p-1}=\displaystyle\sum_{j=1,j\neq i}^{N}\frac{b(N)_j}{|i-j|^{\lambda}},\\ L_{p,q,\lambda,N}b(N)_i^{q-1}=\displaystyle\sum_{j=1,j\neq i}^{N}\frac{a(N)_j}{|i-j|^{\lambda}}.\end{cases}\tag{13}$$

由于

$$(a(N),b(N))\in\mathbf{S}(N),(a(N),b(N))\neq(0,0).$$

因此,从(13)得到

$$\min\{a(N)_i,b(N)_i\}>0,\ \forall 1\leqslant i\leqslant N,\tag{14}$$

即 $L_{p,q,\lambda,N}>0$.

不失一般性,假设 $a(N)_1=\max\{a(N)_1,\cdots,a(N)_N,b(N)_1,\cdots,b(N)_N\}$. 注意到(14),从(13)的 1 式中可知存在一个仅依赖于 1 式的正的常数 C_1,使得

$$L_{p,q,\lambda,N}a(N)_1^{p-2}\leqslant\sum_{j=2}^{N}\frac{1}{(j-1)^{\lambda}}\leqslant C_1\int_1^N t^{-\lambda}\mathrm{d}t,\tag{15}$$

即

$$L_{p,q,\lambda,N}\leqslant\begin{cases}C_1a(N)_1^{2-p}\log N & \lambda=1;\\ C_1a(N)_1^{2-p}(1-\lambda)^{-1}(N^{1-\lambda}-1) & \lambda>0 \text{ 且 } \lambda\neq 1.\end{cases}\tag{16}$$

由于

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{N}a(N)_i^p=1,\\ N^{-1}\leqslant a(N)_1^p\leqslant 1.\end{gathered}\tag{17}$$

将这一结论应用到(16),可得 $L_{p,q,\lambda,N}<\infty$. 定理 1 证毕.

3　定理 2 的证明

定理 2 的证明

第一步:估计上界. 存在 $\ell\in\{1,2,\cdots,N\}$,使得下面两式中的其中一个成立

$$a(N)_\ell=\max\{a(N)_1,\cdots,a(N)_N,b(N)_1,\cdots,b(N)_N\},\tag{18}$$

或

$$b(N)_\ell=\max\{a(N)_1,\cdots,a(N)_N,b(N)_1,\cdots,b(N)_N\}.\tag{19}$$

显然,从方程组(16)和(17)可知,存在一个上界 C_ℓ. 我们来找一个独立于 ℓ 的另一个上界.

当(18)成立时,用同样的方法推导(17)和(15),可得

$$N^{-1}\leqslant a(N)_\ell^p\leqslant 1,\tag{20}$$

且

$$L_{p,q,\lambda,N}a(N)_\ell^{p-2}\leqslant\sum_{j=1,j\neq\ell}^{N}\frac{1}{|\ell-j|^{\lambda}}=\sum_{k=1}^{\ell-1}(\ell-k)^{-\lambda}+\sum_{k=\ell+1}^{N}(k-\ell)^{-\lambda}=\sum_{k=1}^{\ell-1}k^{-\lambda}+\sum_{k=1}^{N-\ell}k^{-\lambda}\leqslant$$

$$\int_1^{\ell}\frac{\mathrm{d}t}{t^{\lambda}}+\int_1^{N-\ell+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^{\lambda}}=(1-\lambda)^{-1}[\ell^{1-\lambda}+(N-\ell+1)^{1-\lambda}-2],\tag{21}$$

其中，$\lambda>0$ 且 $\lambda\neq1$. 显然，

$$\begin{cases}\ell^{1-\lambda}+(N-\ell+1)^{1-\lambda}\leqslant2(N+1)^{1-\lambda} & \lambda\in(0,1);\\ \ell^{1-\lambda}+(N-\ell+1)^{1-\lambda}\geqslant2(N+1)^{1-\lambda} & \lambda>1.\end{cases}$$

将此结论应用到(21)，得

$$L_{p,q,\lambda,N}a(N)_{\ell}^{p-2}\leqslant\frac{2}{1-\lambda}[(N+1)^{1-\lambda}-1],\tag{22}$$

其中，$\lambda>0$ 且 $\lambda\neq1$.

当 $\lambda=1$ 时，类似文献[7]中(9)的推导过程，仍然可得

$$L_{p,q,\lambda,N}a(N)_{\ell}^{p-2}\leqslant2(\log N+1-\log 2).\tag{23}$$

结合(22)，(23)及(20)，可得如下结论：

(1)当 $p\in(1,2]$，$a(N)_{\ell}^{2-p}\leqslant1$ 时，可得

$$L_{p,q,\lambda,N}\leqslant\begin{cases}2(\log N+1-\log 2) & \lambda=1;\\ 2(1-\lambda)^{-1}[(N+1)^{1-\lambda}-1] & \lambda>0 \text{ 且 } \lambda\neq1.\end{cases}$$

(2)当 $p>2$，$a(N)_{\ell}^{2-p}\leqslant N^{1-2/p}$时，可得

$$L_{p,q,\lambda,N}\leqslant\begin{cases}2N^{1-2/p}(\log N+1-\log 2) & \lambda=1;\\ 2(1-\lambda)^{-1}N^{1-2/p}[(N+1)^{1-\lambda}-1] & \lambda>0 \text{ 且 } \lambda\neq1.\end{cases}$$

当(19)成立时，只要用 q 代替 p，上述结论依然成立. 因此，(9)和(10)成立.

接下来证明(11). 用 $a(N)_i$ 乘(13)的第 1 式，并从 1 到 N 进行求和，可得

$$L_{p,q,\lambda,N}\sum_{i=1}^{N}a(N)_i^p=\sum_{i,j=1,i\neq j}^{N}\frac{a(N)_ib(N)_j}{|i-j|^{\lambda}}.\tag{24}$$

令

$$\begin{cases}\tilde{a}(N)=(a(N)_1,a(N)_2,\cdots,a(N)_N,0,\cdots)\\ \tilde{b}(N)=(b(N)_1,b(N)_2,\cdots,b(N)_N,0,\cdots)\end{cases},$$

由于$(a(N),b(N))\in\mathbf{S}(N)$，则$(\tilde{a}(N),\tilde{a}(N))\in\mathbf{S}:=\{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b});\|\boldsymbol{a}\|_{l^p}=\|\boldsymbol{b}\|_{l^q}=1\}$.

又从(24)和(6)，可知 $L_{p,q,\lambda,N}=L_{p,q,\lambda,N}\sum\limits_{i=1}^{N}a(N)_i^p=\sum\limits_{i,j=1,i\neq j}^{\infty}\dfrac{\tilde{a}(N)_i\tilde{b}(N)_j}{|i-j|^{\lambda}}\leqslant L_{p,q,\lambda}$

故(11)成立.

第二步：估计下界. 首先，令 $\boldsymbol{a}=(0,1,0,\cdots,0)$，$\boldsymbol{b}=(1,0,\cdots,0)$. 则$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\in\mathbf{S}(N)$. 于是

$$L_{p,q,\lambda,N}\geqslant\frac{a_2b_1}{|2-1|^{\lambda}}=1.\tag{25}$$

接下来，令 $\tilde{a}_i=N^{-1/p}$，$\tilde{b}_i=N^{-1/q}$，其中 $i=1,2,\cdots,N$. 则$(\tilde{a},\tilde{b})\in\mathbf{S}(N)$. 于是

$$L_{p,q,\lambda,N}\geqslant\sum_{i\neq j}\frac{\tilde{a}_i\tilde{b}_j}{|i-j|^{\lambda}}=\frac{2}{N^{1/p+1/q}}\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\frac{1}{(j-i)^{\lambda}}.\tag{26}$$

当 $\lambda=1$ 时，有

$$\sum_{j=i+1}^{N}\frac{1}{j-i}=\sum_{k=1}^{N-i}k^{-1}\geqslant\int_1^{N-i+1}t^{-1}\mathrm{d}t=\log(N-i+1),$$

进一步，可得

$$\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\frac{1}{j-i}\geqslant\sum_{i=1}^{N-1}\log(N-i+1)=\sum_{k=2}^{N}\log k\geqslant\int_1^N\log t\mathrm{d}t=N\log N-(N-1).$$

又因当 $\lambda>0$ 且 $\lambda\neq1$ 时，有

$$\sum_{j=i+1}^{N}\frac{1}{(j-i)^{\lambda}}=\sum_{k=1}^{N-i}k^{-\lambda}\geqslant\int_1^{N-i+1}t^{-\lambda}\mathrm{d}t=(\lambda-1)^{-1}[1-(N-i+1)^{1-\lambda}].\tag{27}$$

因此,当 $\lambda>0$ 且 $\lambda\neq 1,2$ 时,可得

$$\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\frac{1}{(j-i)^{\lambda}}\geqslant\sum_{i=1}^{N-1}(\lambda-1)^{-1}[1-(N-i+1)^{1-\lambda}]=(\lambda-1)^{-1}\left[(N-1)-\sum_{i=1}^{N-1}(N-i+1)^{1-\lambda}\right]=$$

$$(\lambda-1)^{-1}\left[(N-1)-\sum_{k-2}^{N}k^{1-\lambda}\right]\geqslant(\lambda-1)^{-1}[(N-1)-(2-\lambda)^{-1}(N^{2-\lambda}-1)].$$

且当 $\lambda=2$ 时,由(27)可得

$$\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\frac{1}{(j-i)^{2}}\geqslant\sum_{i=1}^{N-1}[1-(N-i+1)^{-1}]=(N-1)-\sum_{k=2}^{N}k^{-1}\geqslant(N-1)-\log N.$$

将这些估计应用到(26),可求出当 $\lambda>0$ 时,$L_{p,q,\lambda,N}$ 的下界:

$$L_{p,q,\lambda,N}\geqslant\begin{cases}\dfrac{2}{N^{1/p+1/q}}\dfrac{1}{\lambda-1}\left[(N-1)-\dfrac{1}{2-\lambda}(N^{2-\lambda}-1)\right] & \lambda\neq 1,2;\\ \dfrac{2}{N^{1/p+1/q}}[(N-1)-\log N] & \lambda=2;\\ \dfrac{2}{N^{1/p+1/q}}[N\log N-(N-1)] & \lambda=1.\end{cases}\tag{28}$$

结合以上结果和(25),可得(12)成立. 故定理 2 证毕.

[参考文献]

[1] HARDY G H,LITTLEWOOD J E,PLYA G. Inequalities[M]. Cambridge:Cambridge University Press,1952.

[2] LIEB E H. Sharp constants in the Hardy-Littlewood-Sobolev and related Inequalities[J]. Annals of mathematics,1983,118:349-374.

[3] LEI Y T,LI C M. Sharp criteria of Liouville type for some nonlinear systems[J]. Discrete and continuous dynamical systems,2016,36:3277-3315.

[4] CHEN W X,LI C M,QU B. Classification of solutions for a system of integral equations[J]. Communications in partial differential equations,2005,30:59-65.

[5] JIN C,LI C M. Qualitative analysis of some systems of integral equations[J]. Calculus of variations and partial differential equations,2006,26:447-457.

[6] LEI Y T,LI C M,MA C. Asymptotic radial symmetry and growth estimates of positive solutions to weighted Hardy-Littlewood-Sobolev system[J]. Calculus of variations and partial differential equations,2012,45:43-61.

[7] LI C M,VILLAVERT J. An extension of the Hardy-Littlewood-Pólya inequality[J]. Acta mathematica scientia,2011,31(B):2285-2288.

[8] CHENG Z,LI C M. An extended discrete Hardy-Littlewood-Sobolev inequality[J]. Discrete and continuous dynamical systems,2014,34:1951-1959.

[9] LIEB E H. Coberent states as a tool for obtaining rigorous bounds[C]//Proceedings of the Symposium on Coberent States,past,present and future. Oak Ridge:World Scientific,1994:267-278.

[10] HUANG G G,LI C M,YIN X M. Existence of the maximizing pair for the discrete Hardy-Littlewood-Sobolev inequality[J]. Discrete and continuous dynamical systems,2015,35:935-942.

[责任编辑:陆炳新]