doi:10.3969/j.issn.1001-4616.2023.04.003

路因子临界覆盖图存在的若干充分条件

袁　园

(海南大学数学与统计学院,海南 海口 570228)

[**摘要**]　设 G 是一个图,如果 G 的支撑子图 F 的每个分支都是一条路,则称 F 是路因子. $P_{\geqslant t}$-因子表示每个分支至少含有 t 个顶点的路因子. 对于任意 $e\in E(G)$,如果图 G 存在 $P_{\geqslant t}$-因子包含边 e,则称图 G 是 $P_{\geqslant t}$-因子覆盖的. 对于图 G 的任意顶点子集 S,$|S|=k$,如果 $G-S$ 是 $P_{\geqslant t}$-因子覆盖的,则称 G 是 $P_{\geqslant t}$-因子临界覆盖的. 本文考虑 $P_{\geqslant t}$-因子临界覆盖图存在的几个充分条件,且通过给出极图说明在某种意义下给出的界是最好的.

[**关键词**]　联结数,连通度,路因子,$P_{\geqslant t}$-因子,$P_{\geqslant t}$-因子临界覆盖图

[**中图分类号**]05C70;05C38　[**文献标志码**]A　[**文章编号**]1001-4616(2023)04-0011-06

The Sufficient Conditions for the Existence of Path-Factor Critical Covered Graphs

Yuan Yuan

(School of Mathematics and Statistics,Hainan University,Haikou 570228,China)

Abstract:Let G be a graph. A spanning subgraph F of G is called a path factor if each component of F is a path. Denote by $P_{\geqslant t}$-factor the path factor each component of which admits at least t vertices. We say that G is $P_{\geqslant t}$-factor covered if G has a $P_{\geqslant t}$-factor containing e for any $e\in E(G)$. For arbitrary $S\subseteq V(G)$ with $|S|=k$,if $G-S$ is $P_{\geqslant t}$-factor covered,then we say G is $P_{\geqslant t}$-factor-critical covered. In this paper,we present sufficient conditions for graphs to be $P_{\geqslant t}$-factor-critical covered and construct counterexamples to show that the bounds are best possible in some sense.

Key words:Binding number,connectivity,path factor,$P_{\geqslant t}$-factor,$P_{\geqslant t}$-factor-critical covered graph

在这篇文章中,我们主要考虑简单图. 本文未定义的概念和术语,读者可以参考文献[1].

设 G 是一个图,其中顶点集是 $V(G)$,边集是 $E(G)$. 对于图 G 的任一点 v,用符号 $d_G(v)$ 表示点 v 的度数. 给定顶点子集 $S\subseteq V(G)$,$G[S]$ 表示由 S 诱导的图 G 的子图. 记 $G-S=G[V(G)\backslash S]$且 $\kappa(G)$ 为图 G 的连通度. 通常,用 $\omega(G)$ 和 $i(G)$ 分别表示图 G 的连通分支和孤立点的个数. 图 G 的联结数定义为:

$$\operatorname{bind}(G)=\min\left\{\frac{|N_G(X)|}{|X|}:\phi\neq X\subseteq V(G),N_G(X)\neq V(G)\right\}.$$

记 P_n为具有 n 个顶点的路. 图 G 的路因子是一个生成子图,其中每个分支是阶数至少为 2 的路. $P_{\geqslant t}$-因子是每个分支的阶数 $t\geqslant 2$ 的路因子. 设 H 是一个因子临界图,如果图 $G=K_1$,或 $G=K_2$,或将图 H 中的每个顶点 u 增加一个新的顶点 v 作成一条新的边,那么称图 G 是一个太阳(sun). 具有至少 6 个顶点的太阳称为大太阳(big sun). 用符号 sun(G) 表示图 G 的太阳分支的数目. 如果对于图 G 的任意一条边 e,都存在一个 $P_{\geqslant t}$-因子包含边 e,则称 G 是 $P_{\geqslant t}$-因子覆盖的. 文献[2]给出了 $(P_{\geqslant t},k)$-因子临界覆盖图的概念:对于图 G 的任意子集 S,$|S|=k$,如果 $G-S$ 是 $P_{\geqslant t}$-因子覆盖的,则称图 G 是 $(P_{\geqslant t},k)$-因子临界覆盖的.

我们列出一些关于 $P_{\geqslant t}$-因子的已知结果. 文献[3]给出了 $P_{\geqslant 2}$-因子存在的充分必要条件. 文献[4]刻画了具有 $P_{\geqslant 3}$-因子的图类. 文献[5]刻画了 $P_{\geqslant 2}$-因子和 $P_{\geqslant 3}$-因子覆盖图. 文献[2]给出了 $(P_{\geqslant 2},k)$-

收稿日期:2023-04-06.

基金项目:海南省自然科学基金青年基金项目(120QN176)、海南大学科研启动基金项目(KYQD(ZR)19101).

通讯作者:袁园,博士,讲师,研究方向:图论. E-mail:kuailenanshi@ 126.com

因子临界覆盖图和$(P_{\geqslant 3},k)$-因子临界覆盖图存在的充分条件. 关于因子的更多结果可参考文献[6-9].

定理1[2]　$k\geqslant 0$是一个整数,图G满足$\kappa(G)\geqslant k+1$. 若$\mathrm{bind}(G)>k+1$,则G是$(P_{\geqslant 2},k)$-因子临界覆盖图.

定理2[2]　$k\geqslant 1$是一个整数,图G满足$\kappa(G)\geqslant k+1$,$|V(G)|\geqslant k+3$. 若$\mathrm{bind}(G)>k+2$,则G是$(P_{\geqslant 3},k)$-因子临界覆盖图.

图G称为$P_{\geqslant k}$-因子一致图,如果对任意边$e_1,e_2\in E(G)$,G中存在$P_{\geqslant k}$-因子覆盖e_1且避开e_2. 最近,文献[10]借助联结数刻画了$P_{\geqslant 3}$-因子一致图. 受这些结果的启发,一个自然且有趣的想法是给出$(P_{\geqslant 2},k)$-因子临界覆盖图和$(P_{\geqslant 3},k)$-因子临界覆盖图的刻画. 我们的主要结果是借助连通度和联结数给出这两类图存在的充分条件,从而推广了文献[2]中的结果.

定理3　k和r是非负整数. 图G满足$\kappa(G)\geqslant k+r+1$. 如果$\mathrm{bind}(G)>\dfrac{k+r+1}{2r+1}$,那么$G$是$(P_{\geqslant 2},k)$-因子临界覆盖图.

定理4　$k\geqslant 1$和r是非负整数. 图G满足$|V(G)|\geqslant k+3$. 如果$\mathrm{bind}(G)\geqslant\dfrac{(k+3)r+2+k}{2r+1}$且$\kappa(G)\geqslant k+r+1$,那么$G$是$(P_{\geqslant 3},k)$-因子临界覆盖图.

1　预备知识

在本节,为了给出主要结果的证明,需要用到下面的两个引理. 第一个引理得到了$P_{\geqslant 2}$-因子覆盖图存在的充分必要条件.

引理1[5]　连通图G是$P_{\geqslant 2}$-因子覆盖的当且仅当对于任意顶点子集X,成立

$$i(G-X)\leqslant 2|X|-\varepsilon_1(X),$$

其中,$\varepsilon_1(X)$定义为

$$\varepsilon_1(X)=\begin{cases}2, & \text{如果 } X \text{ 不是独立集;}\\ 1, & \text{如果 } X \text{ 是非空独立集且 } G-X \text{ 存在非平凡的分支;}\\ 0, & \text{否则.}\end{cases}$$

下面的引理给出了图中存在$P_{\geqslant 3}$-因子覆盖图的充分必要条件.

引理2[2]　连通图G是$P_{\geqslant 3}$-因子覆盖的当且仅当对于任意顶点子集X成立

$$\mathrm{sun}(G-X)\leqslant 2|X|-\varepsilon_2(X),$$

其中,$\varepsilon_2(X)$定义为

$$\varepsilon_2(X)=\begin{cases}2, & \text{如果 } X \text{ 不是独立集;}\\ 1, & \text{如果 } X \text{ 是非空独立集且 } G-X \text{ 存在不是太阳的分支;}\\ 0, & \text{否则.}\end{cases}$$

2　定理3的证明

在本节,我们通过联结数和连通度给出了$P_{\geqslant 2}$-因子覆盖图存在的条件.

如果$r=0$,由定理1可知定理3是成立的. 接下来我们考虑$r\geqslant 1$. 对任意子集$S\subset V(G)$,$|S|=k$,令$L=G-S$. 为了证明定理3,我们只需证明L是$P_{\geqslant 2}$-因子覆盖的. 用反证法,假设L不是$P_{\geqslant 2}$-因子覆盖的. 根据引理1,下面的式子成立

$$i(L-X)\geqslant 2|X|-\varepsilon_1(X)+1. \tag{1}$$

接下来根据$|X|$的值进行分类讨论.

情形1　$|X|=0$.

显然,$\varepsilon_1(X)=0$. 根据不等式(1),我们可以得到

$$i(H-X)=i(H)\geqslant 1. \tag{2}$$

因为$\kappa(G)\geqslant k+r+1$,所以$i(L)=0$,这与不等式(2)相矛盾.

情形2　$1\leqslant|X|\leqslant r$.

显然地,$\varepsilon_1(X)\leqslant|X|$. 根据不等式(1),我们可以得到

$$i(L-X)\geqslant 2|X|-\varepsilon_1(X)+1\geqslant|X|+1\geqslant 2. \tag{3}$$

因为 $\kappa(G)\geqslant k+r+1$,所以 $i(L-X)=0$,这与不等式(3)相矛盾.

情形 3　$|X|\geqslant r+1$.

注意到 $\varepsilon_1(X)\leqslant 2$,由不等式(1)可得

$$i(L-X)\geqslant 2|X|-1. \tag{4}$$

令 $E=\{x:d_{L-X}(x)=0,x\in V(L)\}$,由不等式(4)可得 $E\neq\phi$ 且 $|N_G(E)|\leqslant|S|+|X|=k+|X|$. 再根据不等式(4)和联结数的定义可得

$$\frac{k+r+1}{2r+1}<\mathrm{bind}(G)\leqslant\frac{|N_G(E)|}{|E|}=\frac{|N_G(E)|}{i(H-X)}\leqslant\frac{k+|X|}{2|X|-1}\leqslant\frac{k+r+1}{2r+1}, \tag{5}$$

这显然是一个矛盾. 结论成立.

注 1　条件 $\kappa(G)\geqslant k+r+1$ 不能用 $\kappa(G)\geqslant k+r$ 替代. 令 $G=K_{k+r}(2r-1)K_1$,其中 k 和 r 是非负整数. 显然,$\kappa(G)=k+r$ 且 $\mathrm{bind}(G)=\frac{k+r}{2r-1}>\frac{k+r+1}{2r+1}$.

对任意 $S\subset V(K_{k+r})$,$|S|=k$,令 $L=G-S$. 选择 $X=V(K_{k+r})\backslash S\subset V(L)$,因为 X 不是独立集,所以 $\varepsilon_1(X)=2$. 从而,$i(L-X)=2r-1>2r-2$. 根据引理 1,L 不是 $P_{\geqslant 2}$-因子覆盖的,因此,G 不是$(P_{\geqslant 2},k)$-因子临界覆盖的.

注 2　条件 $\mathrm{bind}(G)>\frac{k+r+1}{2r+1}$在一定意义下是最好的. 设 $G=K_{k+r+1}(2r+1)K_1$,其中 k 和 r 是非负整数. 显然,$\kappa(G)=k+r+1$ 且 $\mathrm{bind}(G)=\frac{k+r+1}{2r+1}$. 对任意 $S\subset V(K_{k+r+1})$,$|S|=k$,令 $L=G-S$. 选择 $X=V(K_{k+r+1})\backslash S\subset V(L)$,因为 X 不是独立集,所以 $\varepsilon_1(X)=2$. 从而 $i(L-X)=2r+1>2r$. 根据引理 1,L 不是 $P_{\geqslant 2}$-因子覆盖的. 因此,G 不是 $P_{\geqslant 2}$-因子临界覆盖的.

3　定理 4 的证明

当 $r=0$,根据定理 2,可知 G 是 $(P_{\geqslant 3},k)$-因子临界覆盖的. 因此,我们只需要考虑 $r\geqslant 1$ 的情形.

对任意 $S\subset V(G)$,$|S|=k$,令 $L=G-S$. 为了证明定理 4,接下来证明 L 是 $P_{\geqslant 3}$-因子覆盖的. 用反证法. 假设 L 不是 $P_{\geqslant 3}$-因子覆盖的. 根据引理 2,可以得到

$$\mathrm{sun}(H-X)\geqslant 2|X|-\varepsilon_2(X)+1 \tag{6}$$

对某个子集 $X\subseteq V(G)$ 成立. 现在我们考虑下面的 4 种情形.

情形 1　$|X|=0$.

在这种情形下,$\varepsilon_2(X)=0$. 借助不等式(6),下面的式子成立

$$1\leqslant\mathrm{sun}(L-X)=\mathrm{sun}(L)\leqslant\omega(L)=1,$$

这意味着 $\mathrm{sun}(L)=\omega(L)=1$.

论断　L 是一个大太阳.

否则,$L=K_1$或 $L=K_2$. 从而$|V(G)|=|S|+|V(L)|\leqslant 2+k$,这与 $|V(G)|\geqslant k+3$ 相矛盾.

根据上面的论断,记 F 是 L 的因子临界图,则有 $|V(L)\backslash V(F)|=|V(F)|\geqslant 3$,从而可以得到

$$\mathrm{bind}(G)\leqslant\frac{|N_G(V(L)\backslash V(F))|}{|V(L)\backslash V(F)|}\leqslant\frac{|N_G(V(G)\backslash(S\cup V(F)))|}{|V(L)\backslash V(F)|}\leqslant\frac{|S\cup V(F)|}{|V(F)|}=\frac{|S|+|V(F)|}{|V(F)|}\leqslant 1+\frac{k}{3},$$

这与条件 $\mathrm{bind}(G)\geqslant\frac{(k+3)r+2+k}{2r+1}$相矛盾.

情形 2　$1\leqslant|X|\leqslant r$.

显然,$\varepsilon_2(X)\leqslant|X|$. 根据不等式(6),我们可以得到

$$1=\omega(L-X)\geqslant\mathrm{sun}(L-X)\geqslant 2|X|-\varepsilon_2(X)+1\geqslant 2,$$

产生矛盾.

情形 3　$|X|=r+1$.

在这种情形下,$\varepsilon_2(X)\leqslant 2$. 根据不等式(6),可以得到

$$\mathrm{sun}(L-X)\geqslant 2|X|-\varepsilon_2(X)+1\geqslant 2r+1. \tag{7}$$

子情形 3.1　$L-X$ 有一个非太阳的分支 Y.

子情形 3.1.1　$a\geqslant 1$.

令 $W=V(Y)\cup V(aK_1)\cup V(bK_2)\cup V(T_1)\cup\cdots\cup V(T_c)$,其中 a,b,c 分别表示孤立点、K_2 和大太阳分支的个数,从而

$$|W|=|V(Y)|+a+2b+\sum_{i=1}^{c}|V(T_i)|,$$

且

$$|N_G(W)|\leqslant|S|+|X|+|V(Y)|+2b+\sum_{i=1}^{c}|V(T_i)|\leqslant k+r+1+|V(Y)|+2b+\sum_{i=1}^{c}|V(T_i)|.$$

根据联结数的定义,我们可以得到

$$\mathrm{bind}(G)\leqslant\frac{|N_G(W)|}{|W|}\leqslant\frac{k+r+1+|V(Y)|+2b+\sum_{i=1}^{c}|V(T_i)|}{|V(Y)|+a+2b+\sum_{i=1}^{c}|V(T_i)|}\leqslant$$

$$1+\frac{k+r}{|V(Y)|+a+2b+\sum_{i=1}^{c}|V(T_i)|}\leqslant 1+\frac{k+r}{3+a+2b+6c}\leqslant 1+\frac{k+r}{3+a+b+c}\leqslant\frac{k+3r+4}{2r+4},$$

这与条件 $\mathrm{bind}(G)\geqslant\frac{(k+3)r+2+k}{2r+1}$ 相矛盾.

子情形 3.1.2　$a=0$.

令 $M=V(Y)\cup V(bK_2)\cup V(T_1)\cup\cdots\cup V(T_c)$,其中 a,b,c 分别表示孤立点、K_2和大太阳分支的个数,则存在点 $x,y\in V(M)$ 满足 $d_M(x)=1,xy\in E(M)$.

因为

$$|V(M)\backslash\{y\}|=|V(Y)|+2b+\sum_{i=1}^{c}|V(T_i)|-1\geqslant 3+2b+6c-1=2+2b+6c$$

和

$$|N_G(V(M)\backslash\{y\})|\leqslant|S|+|X|+|V(Y)|+2b+\sum_{i=1}^{c}|V(T_i)|-1=k+r+|V(Y)|+2b+\sum_{i=1}^{c}|V(T_i)|,$$

所以

$$\mathrm{bind}(G)\leqslant\frac{|N_G(V(M)\backslash\{y\})|}{|(V(M)\backslash\{y\}|}\leqslant\frac{k+r+|V(Y)|+2b+\sum_{i=1}^{c}|V(T_i)|}{|V(Y)|+2b+\sum_{i=1}^{c}|V(T_i)|-1}\leqslant 1+\frac{k+r+1}{2+2b+6c}\leqslant\frac{k+5r+5}{4r+4},$$

这与条件 $\mathrm{bind}(G)\geqslant\frac{(k+3)r+2+k}{2r+1}$ 相矛盾.

子情形 3.2　$L-X$ 没有非太阳分支.

在这种情形下,我们可以得到

$$\mathrm{sun}(L-X)=a+b+c\geqslant 2|X|-\varepsilon_2(X)+1\geqslant 2r+1.$$

子情形 3.2.1　$a\geqslant 1$.

令 $P=ak_1\cup bK_2\cup T_1\cup T_2\cup\cdots\cup T_c$,其中 a,b,c 分别表示孤立点、K_2以及大太阳分支的数目. 结合联结数的定义,可以得到

$$\mathrm{bind}(G)\leqslant\frac{|N_G(P)|}{|V(P)|}\leqslant\frac{|S|+|X|+2b+\sum_{i=1}^{c}|V(T_i)|}{a+2b+\sum_{i=1}^{c}|V(T_i)|}=$$

$$1+\frac{k+r+1-a}{a+2b+\sum_{i=1}^{c}|V(T_i)|}\leqslant 1+\frac{k+r}{a+b+c}\leqslant\frac{k+3r+1}{2r+1},$$

这与条件 $\mathrm{bind}(G)\geqslant\frac{(k+3)r+2+k}{2r+1}$相矛盾.

子情形 3.2.2　$a=0$.

令 $P=bK_2\cup T_1\cup T_2\cup\cdots\cup T_c$,其中 a,b,c 分别表示孤立点、K_2和大太阳分支的数目,则存在 $u,v\in V(P)$满足 $d_P(u)=1$ 和 $uv\in E(P)$. 根据 $\mathrm{bind}(G)\geqslant\frac{(k+3)r+2+k}{2r+1}$ 以及联结数的定义,我们可以得到

$$\frac{(k+3)r+2+k}{2r+1}\leqslant\mathrm{bind}(G)\leqslant\frac{|N_G(V(P)\setminus\{v\})|}{|V(P)\setminus\{v\}|}\leqslant\frac{|S|+|X|+2b+\sum_{i=1}^{c}|V(T_i)|-1}{2b+\sum_{i=1}^{c}|V(T_i)|-1}=$$

$$1+\frac{k+r+1}{2b+\sum_{i=1}^{c}|V(T_i)|-1}\leqslant 1+\frac{k+r+1}{2b+6c-1}\leqslant 1+\frac{k+r+1}{2(a+b+c)-1}\leqslant 1+\frac{k+r+1}{4r+1}.$$

从而得到

$$1+\frac{k+r+1}{4r+1}\geqslant\frac{(k+3)r+2+k}{2r+1}=1+\frac{kr+r+k+1}{2r+1},$$

这与条件

$$(kr+r+k+1)(4r+1)-(2r+1)(k+r+1)=2r^2+2kr+4kr^2+2r>0\text{ 相矛盾.}$$

情形 4　$|X|\geqslant r+2$.

显然地,$\varepsilon_2(X)\leqslant 2$. 借助不等式(6),我们可以得到

$$\mathrm{sun}(L-X)=a+b+c\geqslant 2|X|-\varepsilon_2(X)+1\geqslant 2|X|-1.\tag{8}$$

令 a,b,c 分别表示孤立点、K_2以及大太阳分支的数目.

子情形 4.1　$b+c=0$.

在这种情形下,容易得到 $a\geqslant 2|X|-1$. 根据联结数的定义,可以得到

$$\mathrm{bind}(G)\leqslant\frac{|N_G(V(aK_1))|}{|V(aK_1)|}\leqslant\frac{k+|X|}{2|X|-1}\leqslant\frac{k+r+2}{2r+3},$$

这与条件 $\mathrm{bind}(G)\geqslant\frac{(k+3)r+2+k}{2r+1}$ 相矛盾.

子情形 4.2　$b+c\geqslant 1$.

令 $P=(bK_2)\cup V(T_1)\cup\cdots\cup V(T_c)$. 则存在两个顶点 $x,y\in V(P)$ 满足 $d_P(x)=1$,$xy\in E(P)$.

根据联结数的定义,下面的式子成立

$$\mathrm{bind}(G)\leqslant\frac{|N_G(V(aK_1)\cup(V(P)\setminus\{v\}))|}{|V(aK_1)\cup(V(P)\setminus\{v\})|}\leqslant\frac{|S|+|X|+2b+\sum_{i=1}^{c}|V(T_i)|-1}{a+2b+\sum_{i=1}^{c}|V(T_i)|}\leqslant$$

$$1+\frac{k+|X|-a}{a+2b+6c-1}\leqslant 1+\frac{k+|X|-a}{2|X|-1}\leqslant\frac{k+3r+5}{2r+3},$$

这与条件 $\mathrm{bind}(G)\geqslant\frac{(k+3)r+2+k}{2r+1}$ 相矛盾. 定理成立.

注 3　条件 $\kappa(G)\geqslant k+r+1$ 不能用 $\kappa(G)\geqslant k+r$ 替换.

构造图 $G=K_{k+r}\vee(2r-1)K_1$,其中 k,r 是非负整数且 $k\geqslant 2r^2-1$. 从而可以得到 $\kappa(G)=k+r$ 和 $\mathrm{bind}(G)=\frac{k+r}{2r-1}\geqslant\frac{k+3r+2}{2r+1}$. 对于 $S=V(K_k)$,令 $L=G-S$. 选择 $X=V(K_r)\subseteq V(L)$,我们可以得到

$$\mathrm{sun}(L-X)=2r-1>2|X|-\varepsilon_2(X)=2r-2.$$

通过引理 2,L 不是 $P_{\geqslant 3}$-因子覆盖的. 因此 G 不是 $(P_{\geqslant 3},k)$-因子临界覆盖的.

[参考文献]

[1] BONDY J A,MURTY U S R. Graph Theory[M]. Graduate Texts in Mathematics,London:Springer-Verlag,2008.

[2] ZHOU S Z,SUN Z R. Some existence theorems on path factors with given properties in graphs[J]. Acta mathematica sinica, English series,2020,36(8):917-928.

[3] AKIYAMA J,AVIS D,ERA H. On $a\{1,2\}$-factor of a graph[J]. Tru mathematics,1980,16:97-102.

[4] KANEKO A. A necessary and sufficient condition for the existence of a path factor every component of which is a path of length at least two[J]. Journal of combinatorial theory,series B,2003,88:195-218.

[5] ZHANG H P,ZHOU S. Characterizations for $P_{\geqslant 2}$-factor and $P_{\geqslant 3}$-factor covered graphs[J]. Discrete mathematics,2009,309: 2067-2076.

[6] ZHOU S Z. Binding numbers and restricted fractional (g,f)-factors in graphs[J]. Discrete applied mathematics,2021,305: 350-356.

[7] ZHOU S Z,BIAN Q X,PAN Q R. Path factors in subgraphs[J]. Discrete applied mathematics,2022,319:183-191.

[8] ZHOU S Z,LIU H X,XU Y. A note on fractional ID-$[a,b]$-factor-critical covered graphs[J]. Discrete applied mathematics, 2022,319:511-516.

[9] ZHOU S Z,WU J C,BIAN Q X. On path-factor critical deleted(or covered)graphs[J]. Aequationes mathematicae,2022,96: 795-802.

[10] GAO W,WANG W F. Tight binding number bound for $P_{\geqslant 3}$-factor uniform graphs[J]. Information processing letters,2021, 172,106162.

[责任编辑:陆炳新]

(上接第 10 页)

[3] HOSOYA H,TOPOLOGICAL I. A newly proposed quantity characterizing the topological nature of structural isomers of saturated hydrocarbons[J]. Bulletin of the Chemical Society of Japan,1971,4:2332-2339.

[4] DAS C,GUTMAN I. Estimating the Szeged index[J]. Applied mathematics letters,2009,16:1680-1684.

[5] LIU B,GUTMAN I. On a conjecture on Randic′ indices[J]. Match communications in mathematical in computer chemistry, 2009,62:143-154.

[6] WU B Y D R,MENG J X. Basic properties of total transformation graphs[J]. Journal of mathematical study,2001,34: 109-116.

[7] BONDY J A,MURTY U S R. Graph theory with applications[M]. New York:The Macmillan Press,1976.

[8] VUKICˇEVIC′ D,FURTULA B. Topological index based on the ratios of geometrical and arithmetical means of end-vertex degrees of edges[J]. Journal of mathematical chemistry,2009,46(4):1369-1376.

[9] YUAN Y,ZHOU B,NENAD T. On geometric-arithmetic index[J]. Journal of mathematical chemistry,2010,47(2):833-841.

[10] LI Y P,WU B Y D R. Total Transformation Graphs G(xyz)[J]. Journal of Xinjiang University(natural science edition),2021 (1):1-24.

[11] FATH-TABAR G,FURTULA B,GUTMAN I. A new geometric-arithmetic index[J]. Journal of mathematical chemistry,2010, 47:477-486.

[12] TANG Z,HOU Y. Note on the second geometric-arithmetic index[J]. Match communications in mathematical in computer chemistry,2011,65(3):705-712.

[责任编辑:陆炳新]