doi:10.3969/j.issn.1001-4616.2023.04.004

带非线性扩散的趋化-趋触模型解的大时间行为

刘锦涛,贾 哲

(临沂大学数学与统计学院,山东 临沂 276005)

[摘要] 研究带齐次 Neumann 边界条件的趋化-趋触模型:

$$\begin{cases} u_t=\Delta u^m-\chi\nabla\cdot\left(\dfrac{u}{(1+u)^{\alpha}}\nabla v\right)-\xi\nabla\cdot\left(\dfrac{u}{(1+u)^{\beta}}\nabla w\right)+u(a-\mu u-\lambda w), & x\in\Omega,t>0,\\ v_t=\Delta v-v+u, & x\in\Omega,t>0,\\ w_t=-vw, & x\in\Omega,t>0 \end{cases}$$

其中 $\Omega\subset R^3$ 是带光滑边界的有界域,通过构造合适的能量泛函得当 $0<m\leqslant 1$,并且 μ 充分大时,系统的解(u,v,w)将衰减到常数稳态解$\left(\dfrac{a}{\mu},\dfrac{a}{\mu},0\right)$.

[关键词] 趋化-趋触,非线性扩散,大时间行为,能量泛函

[中图分类号]O175.26 [文献标志码]A [文章编号]1001-4616(2023)04-0017-04

Large Time Behavior to a Chemotaxis-Haptotaxis Model with Nonlinear Diffusion

Liu Jintao,Jia Zhe

(School of Mathematics and Statistics,Linyi University,Linyi 276005,China)

Abstract:This paper deals with the following chemotaxis-haptotaxis model

$$\begin{cases} u_t=\Delta u^m-\chi\nabla\cdot\left(\dfrac{u}{(1+u)^{\alpha}}\nabla v\right)-\xi\nabla\cdot\left(\dfrac{u}{(1+u)^{\beta}}\nabla w\right)+u(a-\mu u-\lambda w), & x\in\Omega,t>0,\\ v_t=\Delta v-v+u, & x\in\Omega,t>0,\\ w_t=-vw, & x\in\Omega,t>0 \end{cases}$$

under homogenous Neumann boundary condition in a bounded domain $\Omega\subset R^3$. It is shown that when $0<m\leqslant 1$, for appropriately large μ, the corresponding solution (u,v,w) goes to the steady state $\left(\dfrac{a}{\mu},\dfrac{a}{\mu},0\right)$ by constructing an appropriate energy functional.

Key words:chemotaxis-haptotaxis,nonlinear diffusion,large time behavior,energy functional

本文研究如下带非线性扩散的趋化-趋触模型

$$\begin{cases} u_t=\Delta u^m-\nabla\cdot(H(u)\nabla v)-\nabla\cdot(S(u)\nabla w)+u(a-\mu u-\lambda w), & x\in\Omega,t>0,\\ v_t=\Delta v-v+u, & x\in\Omega,t>0,\\ w_t=-vw, & x\in\Omega,t>0,\\ mu^{m-1}\dfrac{\partial u}{\partial\nu}-H(u)\dfrac{\partial v}{\partial\nu}-S(u)\dfrac{\partial w}{\partial\nu}=0, & x\in\partial\Omega,t>0,\\ u(x,0)=u_0(x),v(x,0)=v_0(x),w(x,0)=w_0(x), & x\in\Omega \end{cases} \tag{1}$$

收稿日期:2023-04-02.

基金项目:国家自然科学基金项目(12301251、12271232)、山东省自然科学基金项目(ZR2021QA038)、临沂大学科研启动基金项目(LYDX2020BS014).

通讯作者:贾哲,博士,讲师,研究方向:偏微分方程及其应用. E-mail:jiazhe@lyu.edu.cn

解的大时间行为. 其中 $\Omega\subset R^3$ 是带光滑边界的有界域,u,v,w 分别代表癌细胞密度、基质降解酶浓度和细胞外基质浓度. $H(u)$,$S(u)$分别代表趋化敏感项和趋触敏感项. 在本文中假设 H,S 满足如下条件:

$$H(s)\leqslant \chi s(s+1)^{-\alpha},\text{其中 } s\geqslant 0 \text{ 且 } H(0)=0, \tag{2}$$

$$S(s)\leqslant \xi s(s+1)^{-\beta},\text{其中 } s\geqslant 0 \text{ 且 } S(0)=0, \tag{3}$$

式中,$\chi,\xi,\alpha,\beta>0$. 另外,假设初值满足

$$u_0,v_0\in W^{1,\infty}(\Omega),w_0\in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}),\text{其中 } \alpha\in(0,1),u_0,v_0,w_0\geqslant 0. \tag{4}$$

2016 年,Chaplain 等[1]提出肿瘤细胞的运动依赖于随机扩散、趋触运动和基质降解酶的扩散梯度,并引入了趋化-趋触模型. 之后该方程被广泛关注(参见文献[2-10]). 当 $m=1,H(u)=S(u)=u$ 时,Zheng 等[2]研究了解的整体存在性和大时间行为. 另外,当 $0<m\leqslant 1,a=\lambda=\mu$ 时,Xu 等[3]得到模型(1)的解会最终衰减到常数稳态解(1,1,0).

本文主要研究模型(1)弱解的大时间行为,主要结果如下:

定理 1　记 $\Omega\subset R^3$ 是具有光滑边界的有界域. 假设条件(2)-(4)成立,且 $0<m\leqslant 1,0<w_0\leqslant 1,\mu>\left(\dfrac{a\chi^2C^{1-m}}{2m}\right)^{\frac{1}{1+m}}$,其中 C 是一个正常数,则对于任意的 $p\geqslant 2$,有

$$\lim_{t\to\infty}\left(\left\|u(\cdot,t)-\frac{a}{\mu}\right\|_{L^p(\Omega)}+\left\|v(\cdot,t)-\frac{a}{\mu}\right\|_{L^\infty(\Omega)}+\|w(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}\right)=0.$$

1　预备知识

首先回顾模型(1)弱解的整体存在性和有界性结果:

引理 1[4-5]　记 $\Omega\subset R^3$ 是具光滑边界的有界域. 假设 $\alpha>0,\beta>-\dfrac{1}{6}$,则问题(1)存在一个非负弱解满足 $\sup\limits_{t\in(0,+\infty)}(\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}+\|v(\cdot,t)\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}+\|w(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)})\leqslant A$,其中 A 是与 $u_0,v_0,w_0m,\chi,\xi,\alpha,\beta,a,\lambda,\mu,\Omega$ 有关的常数. 特别地,当 $\mu>1$ 时,有

$$\sup_{t\in(0,+\infty)}\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}\leqslant C\mu,$$

式中,C 是与 μ 无关的常数.

下面介绍在定理 1 的证明中起到重要作用的两个引理:

引理 2[2-3]　假设 $0<m\leqslant 1,a>0,0<w_0\leqslant 1$,则当 μ 充分大时,存在常数 $K>0$ 使得对任意的 $x\in\Omega$ 和 $t\geqslant 1$,都有 $v(x,t)\geqslant K$,进一步得到 $w(x,t)\leqslant\|w_0\|_{L^\infty(\Omega)}e^{-K(t-1)}$.

引理 3[6]　假设 $h(t)\in L^1(T,\infty)$,其中 $T>0,h\geqslant 0$. 如果存在常数 $C>0$ 使得

$$h(t)-h(s)\leqslant C(t-s),\text{其中 } t>s>T \text{ 或 } h(t)-h(s)\geqslant -C(t-s),\text{其中 } t>s>T,$$

则 $\lim\limits_{t\to\infty}h(t)=0$.

2　定理 1 的证明

受文献[2-3,7]启发,定义下面的能量泛函:

$$F(t):=\int_\Omega\left(u-1-\frac{a}{\mu}\ln u\right)dx+\sigma\int_\Omega\left(v-\frac{a}{\mu}\right)^2dx+\eta^2\int_\Omega|\nabla w(\cdot,t)|^2dx+\rho\int_\Omega w(\cdot,t)^2dx+\delta\int_\Omega wdx,$$

则 $F(t)$满足下面的引理:

引理 4　假设条件(2)-(4)成立,且 $0<m\leqslant 1,0<w_0\leqslant 1,\mu>\left(\dfrac{a\chi^2C^{1-m}}{2m}\right)^{\frac{1}{1+m}}$,其中 C 是一个正常数,则存在合适的常数 $\sigma,\eta,\rho,\delta>0$ 满足

$$\int_1^{+\infty}\int_\Omega|\nabla w|^2dxdt+\frac{\mu}{2}\int_1^{+\infty}\int_\Omega\left(u-\frac{a}{\mu}\right)^2dxdt+\sigma\int_1^{+\infty}\int_\Omega\left(v-\frac{a}{\mu}\right)^2dxdt\leqslant F(1).$$

证明　经计算得

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega\left(u-1-\frac{a}{\mu}\ln u\right)dx\leqslant -\frac{am}{\mu}\int_\Omega u^{m-3}|\nabla u|^2dx+\frac{\chi a}{\mu}\int_\Omega\frac{1}{u(1+u)^\alpha}\nabla u\cdot\nabla vdx+\frac{\xi a}{\mu}\int_\Omega\frac{1}{u(1+u)^\beta}\nabla u\cdot\nabla wdx-$$

$$\mu\int_\Omega\left(u-\frac{a}{\mu}\right)^2\mathrm{d}x-\lambda\int_\Omega uw\mathrm{d}x+\frac{\lambda a}{\mu}\int_\Omega w\mathrm{d}x\leqslant\frac{\chi^2a}{2\mu m}\int_\Omega u^{1-m}|\nabla v|^2\mathrm{d}x+\frac{\xi^2a}{2\mu m}\int_\Omega u^{1-m}|\nabla w|^2\mathrm{d}x-\mu\int_\Omega\left(u-\frac{a}{\mu}\right)^2\mathrm{d}x+$$
$$\frac{\lambda a}{\mu}\int_\Omega w\mathrm{d}x\leqslant\frac{\chi^2aM^{1-m}}{2\mu m}\int_\Omega|\nabla v|^2\mathrm{d}x+\frac{\xi^2aM^{1-m}}{2\mu m}\int_\Omega|\nabla w|^2\mathrm{d}x-\mu\int_\Omega\left(u-\frac{a}{\mu}\right)^2\mathrm{d}x+\frac{\lambda a}{\mu}\int_\Omega w\mathrm{d}x,$$

式中,$M:=\sup\limits_{t>0}\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}$. 通过模型(1)的第二个式子,我们有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega\left(v-\frac{a}{\mu}\right)^2\mathrm{d}x+2\int_\Omega|\nabla v|^2\mathrm{d}x+2\int_\Omega\left(v-\frac{a}{\mu}\right)^2\mathrm{d}x=2\int_\Omega\left(u-\frac{a}{\mu}\right)\left(v-\frac{a}{\mu}\right)\mathrm{d}x\leqslant\int_\Omega\left(u-\frac{a}{\mu}\right)^2\mathrm{d}x+\int_\Omega\left(v-\frac{a}{\mu}\right)^2\mathrm{d}x,$$

这意味着

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega\left(v-\frac{a}{\mu}\right)^2\mathrm{d}x+2\int_\Omega|\nabla v|^2\mathrm{d}x+\int_\Omega\left(v-\frac{a}{\mu}\right)^2\mathrm{d}x\leqslant\int_\Omega\left(u-\frac{a}{\mu}\right)^2\mathrm{d}x.$$

再通过模型(1)的第三个式子,然后结合引理 1 和引理 2 我们得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega|\nabla w|^2\mathrm{d}x=-2\int_\Omega v|\nabla w|^2\mathrm{d}x-2\int_\Omega w\nabla w\cdot\nabla v\mathrm{d}x\leqslant-K\int_\Omega|\nabla w|^2\mathrm{d}x+\frac{2}{K}\int_\Omega w^2|\nabla v|^2\mathrm{d}x\leqslant$$
$$-K\int_\Omega|\nabla w|^2\mathrm{d}x+C_1\int_\Omega w^2\mathrm{d}x$$

以及

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega w^2\mathrm{d}x\leqslant-2K\int_\Omega w^2\mathrm{d}x,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega w\mathrm{d}x\leqslant-K\int_\Omega w\mathrm{d}x.$$

因此,我们得到

$$F'(t)\leqslant\left(\frac{\chi^2aM^{1-m}}{2\mu M}-2\sigma\right)\int_\Omega|\nabla v|^2\mathrm{d}x+\left(\frac{\xi^2aM^{1-m}}{2\mu m}-\eta K\right)\int_\Omega|\nabla w|^2\mathrm{d}x-(\mu-\sigma)\int_\Omega\left(u-\frac{a}{\mu}\right)^2\mathrm{d}x-$$
$$\sigma\int_\Omega\left(v-\frac{a}{\mu}\right)^2\mathrm{d}x+(C_1\eta-2K\rho)\int_\Omega w^2\mathrm{d}x+\left(\frac{\lambda a}{\mu}-K\delta\right)\int_\Omega w\mathrm{d}x,\tag{5}$$

由条件 $0<m\leqslant1$,$M<C\mu$ 以及 $\mu>\left(\frac{a\chi^2C^{1-m}}{2m}\right)^{\frac{1}{1+m}}$ 得 $\mu^2>\frac{a\chi^2M^{1-m}}{2m}$. 因此存在常数 $\sigma>0$ 满足 $\frac{a\chi^2M^{1-m}}{2\mu m}<2\sigma<\mu$. 接下来选择充分大的常数 $\eta,\delta,\rho>0$ 使其满足条件 $\eta K-\frac{\xi^2a(1+M)^{1-m}}{2\mu m}\geqslant1$,$2K\rho-C_1\eta\geqslant1$ 以及 $K\delta-\frac{\lambda a}{\mu}>1$. 最后结合式(5)得 $F'(t)\leqslant-\int_\Omega|\nabla w|^2\mathrm{d}x-\frac{\mu}{2}\int_\Omega\left(u-\frac{a}{\mu}\right)^2\mathrm{d}x-\sigma\int_\Omega\left(v-\frac{a}{\mu}\right)^2\mathrm{d}x-\int_\Omega w^2\mathrm{d}x-\int_\Omega w\mathrm{d}x.$

对该式关于时间 t 在$(1,+\infty)$上积分,得到

$$\int_1^{+\infty}\int_\Omega|\nabla w|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\frac{\mu}{2}\int_1^{+\infty}\int_\Omega\left(u-\frac{a}{\mu}\right)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\sigma\int_1^{+\infty}\int_\Omega\left(v-\frac{a}{\mu}\right)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant F(1).$$

定理 1 的证明 定义 $\varphi(z)=\int_0^zS(\sigma)\mathrm{d}\sigma$,则由条件(3)知对任意的 $z\geqslant0$,有

$$\varphi(z)\leqslant\frac{\xi}{2-\beta}(1+z)^{2-\beta},\text{进而得 }\varphi(z)\leqslant\begin{cases}\dfrac{2\xi}{|2-\beta|},\text{若 }\beta>2\\ \xi\ln(1+u),\text{若 }\beta=2\\ \dfrac{\xi}{2-\beta}(1+z)^{2-\beta},\text{若 }\beta<2\end{cases}$$

对模型(1)的第一个方程乘以 $u-\frac{a}{\mu}$,并在 Ω 上积分,则有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega\left(u-\frac{a}{\mu}\right)^2\mathrm{d}x\leqslant-m\int_\Omega u^{m-1}|\nabla u|^2\mathrm{d}x+\chi\int_\Omega\frac{u}{(1+u)^\alpha}\nabla u\cdot\nabla v\mathrm{d}x-\int_\Omega\varphi(u)\cdot\Delta w\mathrm{d}x+2a\int_\Omega u^2\mathrm{d}x-\mu\int_\Omega u^3\mathrm{d}x-$$
$$\lambda\int_\Omega u^2w\mathrm{d}x-\frac{a^2}{\mu}\int_\Omega u\mathrm{d}x+\frac{a\lambda}{\mu}\int_\Omega uw\mathrm{d}x\leqslant-\frac{m}{2}\int_\Omega u^{m-1}|\nabla u|^2\mathrm{d}x+\frac{\chi^2}{2m}\int_\Omega u^{3-m}|\nabla v|^2\mathrm{d}x+\|w_0\|_{L^\infty(\Omega)}\int_\Omega\varphi(u)v\mathrm{d}x+$$

$$D\int_{\Omega}\varphi(u)\mathrm{d}x+2a\int_{\Omega}u^2\mathrm{d}x-\mu\int_{\Omega}u^3\mathrm{d}x-\lambda\int_{\Omega}u^2w\mathrm{d}x-\frac{a^2}{\mu}\int_{\Omega}u\mathrm{d}x+\frac{a\lambda}{\mu}\int_{\Omega}uw\mathrm{d}x.$$

上式用到结论$-\Delta w(x,t)\leqslant\|w_0\|_{L^\infty(\Omega)}v(x,t)+D,(x,t)\in\Omega\times(0,T_{\max})$,其中 D 是正常数(见文献[8]). 结合引理 1 得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega}\left(u-\frac{a}{\mu}\right)^2\mathrm{d}x\leqslant C_2,$$

进而由引理 3 和 4 得当 $t\to\infty$ 时,

$$\left\|u(\cdot,t)-\frac{a}{\mu}\right\|_{L^2(\Omega)}\to 0,$$

再利用 Hölder 不等式得对任意的 $p\geqslant 2$,有

$$\left\|u(\cdot,t)-\frac{a}{\mu}\right\|_{L^p(\Omega)}\to 0.$$

另外,结合模型(1)的第二个式子和引理 1 得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega}\left(v-\frac{a}{\mu}\right)^2\mathrm{d}x+2\int_{\Omega}|\nabla v|^2\mathrm{d}x+2\int_{\Omega}\left(v-\frac{a}{\mu}\right)^2\mathrm{d}x\leqslant C_3.$$

利用引理 3 和 4,同样得到当 $t\to\infty$ 时,

$$\left\|v(\cdot,t)-\frac{a}{\mu}\right\|_{L^2(\Omega)}\to 0.$$

再通过 Gagliardo-Nirenberg 不等式得当 $t\to\infty$ 时,

$$\left\|v(\cdot,t)-\frac{a}{\mu}\right\|_{L^\infty(\Omega)}\to 0.$$

证毕.

3 结论

在定理 1 的条件下,通过构造合适的能量泛函,模型(1)的解会最终衰减到常数稳定解$\left(\frac{a}{\mu},\frac{a}{\mu},0\right)$.

[参考文献]

[1] CHAPLAIN M,LOLAS G. Mathematical modelling of cancer invasion of tissue:dynamic heterogeneity[J]. Networks and heterogen media,2016(1):399-439.

[2] ZHENG J,KE Y. Large time behavior of solutions to a fully parabolic chemotaxis-haptotaxis model in N dimensions[J]. Journal of differential equations,2019,266:1969-2018.

[3] XU H,ZHANG L,JIN C. Global solvability and large time behavior to a chemotaxis-haptotaxis model with nonlinear diffusion[J]. Nonlinear analysis:real world applications,2019,46:238-256.

[4] JIA Z,YANG Z D. Global boundedness to a chemotaxis-haptotaxis model with nonlinear diffusion[J]. Applied mathematics letters,2020,103:106192.

[5] JIA Z,YANG Z D. Global boundedness in a chemotaxis-haptotaxis model with nonlinear diffusion and signal production[J]. Acta mathematic scientia,2021,41A(5):1382-1395.

[6] JIN C. Large time behavior of solutions to a chemotaxis model with porous medium diffusion[J]. Journal of mathematical analysis and applications,2019,478:195-211.

[7] TAO Y,WINKLER M. Large time behavior in a multidimensional chemotaxis-hapotaxis model with slow signal diffusion[J]. SIAM journal on mathematical analysis,2015,47:4229-4250.

[8] TAO Y. Boundedness in a two-dimensional chemotaxis-haptotaxis system[J]. arXiv:1407.7382,2014.

[9] JIN C. Boundedness and global solvability to a chemotaxis-haptotaxis model with slow and fast diffusion[J].Discrete and continuous dynamical systems,2018,23(4):1675-1688.

[10] LI Y,LANKEIT J. Boundedness in a chemotaxis-haptotaxis model with nonlinear diffusion[J]. Nonlinearity,2016,29:1564-1595.

[责任编辑:陆炳新]