

一类带线性约束的变分不等式的 预测校正方法的收敛率分析

葛志利¹, 谭志聪¹, 徐莹莹², 张欣³

(1. 南京特殊教育师范学院数学与信息科学学院, 江苏 南京 210038)

(2. 东南大学信息科学与工程学院, 江苏 南京 211189)

(3. 宿迁学院文理学院, 江苏 宿迁 223800)

[摘要] 考虑一类带线性约束的变分不等式问题: 寻找 $\mathbf{x}^* \in \Omega$ 满足 $\mathbf{F}(\mathbf{x}^*)^T(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \geq 0, \forall \mathbf{x} \in \Omega$, 其中 $\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \in K\}$, $\mathbf{A} \in \mathcal{R}^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathcal{R}^m$, K 是 \mathcal{R}^n 上的一个简单的非空闭凸子集, \mathbf{F} 是 \mathcal{R}^n 到 \mathcal{R}^n 的连续未知算子且满足强单调. 对此类问题, 本文研究了一种新的预测校正方法. 根据已有的收敛性结果, 利用误差界条件进一步分析了该方法的线性收敛性. 最后, 通过交通均衡问题中两个带线性约束例子的数值结果展示了算法的有效性.

[关键词] 线性约束, 变分不等式, 全局线性收敛性, 预测校正方法

[中图分类号] O221.4 [文献标志码] A [文章编号] 1001-4616(2024)03-0001-07

Convergence Rate Analysis of Prediction Correction Methods for a Class of Variational Inequalities with Linear Constraints

Ge Zhili¹, Tan Zhicong¹, Xu Yingying², Zhang Xin³

(1. School of Mathematics and Information Science, Nanjing Normal University of Special Education, Nanjing 210048, China)

(2. School of Information Science and Engineering, Southeast University, Nanjing 211189, China)

(3. School of Arts and Science, Suqian University, Suqian 223800, China)

Abstract: This paper considers a class of variational inequalities with linear constraints: finding $\mathbf{x}^* \in \Omega$, such that $\mathbf{F}(\mathbf{x}^*)^T(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \geq 0, \forall \mathbf{x} \in \Omega$, where $\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \in K\}$, $\mathbf{A} \in \mathcal{R}^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathcal{R}^m$, K is a simple nonempty closed convex subset of \mathcal{R}^n , \mathbf{F} is a continuous unknown mapping from \mathcal{R}^n to \mathcal{R}^n , and satisfies the strong monotonicity. We study a new prediction correction method for this class of problems. Based on the previous convergence results, we further analyze the linear convergence by using the error bound condition. Finally, two numerical results in traffic equilibrium problems with linear constraints demonstrate the effectiveness of the algorithm.

Key words: linear constraints, variational inequalities, global linear convergence, prediction correction method

本文考虑一类带线性约束的变分不等式: 寻找 $\mathbf{x}^* \in \Omega$ 满足

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}^*)^T(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \geq 0, \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1)$$

式中, $\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \in K\}$, \mathbf{F} 是 \mathcal{R}^n 到 \mathcal{R}^n 的连续未知算子, $\mathbf{A} \in \mathcal{R}^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathcal{R}^m$, K 是 \mathcal{R}^n 上的一个简单的非空闭凸子集. 这类变分不等式在交通均衡和网络经济问题中有广泛的应用^[1-3].

通过引入拉格朗日乘子 $\mathbf{y} \in \mathcal{R}_+^m$, 得到问题(1)的拉格朗日函数为

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{F}(\mathbf{x})^T \mathbf{y} + \mathbf{y}^T (\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}).$$

根据一阶最优性条件, 得到问题(1)的等价变分不等式形式为

$$\begin{cases} \mathbf{x}^* \in K, (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)^T (\mathbf{F}(\mathbf{x}^*) + \mathbf{A}^T \mathbf{y}^*) \geq 0, & \forall \mathbf{x} \in K, \\ \mathbf{y}^* \in \mathcal{R}_+^m, (\mathbf{y} - \mathbf{y}^*)^T (-\mathbf{A}\mathbf{x}^* - \mathbf{b}) \geq 0, & \forall \mathbf{y} \in \mathcal{R}_+^m. \end{cases} \quad (2a)$$

$$(2b)$$

收稿日期: 2023-06-03.

基金项目: 国家自然科学基金项目(120081)、江苏省青蓝工程项目、宿迁市科技计划资助项目(M202206)、宿迁学院高级别纵向科研培育项目.

通讯作者: 徐莹莹, 博士研究生, 研究方向: 移动通信网络优化. E-mail: vivi_xuyingying@163.com

当 F 具有显式表达式时,学者们研究了很多数值方法^[4]. 比如,投影类方法^[5],邻近点方法^[6],算子分裂法^[7]等. 然而,通常这些方法每次迭代都需要计算算子 F 的值. 在很多应用中,算子 F 的值往往很难计算,甚至有时它的显式表达式都很难知道. 根据 Wardrop 用户均衡准则^[8],交通均衡问题中带容量约束的拥堵道路收费问题就可以看成这样一类变分不等式问题,其中 K 表示守恒约束, $Ax \leq b$ 表示容量约束. 在这个问题中,由于需求函数是未知的^[9-11],因此 F 未知. 现存的数值方法,如果没有其他额外的信息,很难求解这样的问题. 幸运的是,对于给定的收费 y ,可以通过观测用户的反应得到路段流量 x . 即,给定收费 y ,可以通过观测得到如下变分不等式问题的解 x :

$$(x' - x)^T (F(x) + A^T y) \geq 0, \forall x' \in K, \quad (3)$$

因此,对于任意给定的 y ,可以假设它是一个黑匣子,能得到相应的问题(3)的解.

在上述假设下,Yang 等^[9]对(2)提出了一种迭代方法. 该方法由两步组成. 第一步,又叫预测步. 对于当前点的迭代向量 y^k 和 x_e^k ,其中 x_e^k 是由黑匣子给出的如下变分不等式问题

$$(x' - x)^T (F(x) + A^T y^k) \geq 0, \quad \forall x' \in K \quad (4)$$

的解,找到合适的 β_k 使得预测点

$$\tilde{y}^k = P_{\mathcal{R}_+^m}(y^k + \beta_k(Ax_e^k - b))$$

满足

$$\beta_k \|A(x_e^k - \tilde{x}_e^k)\| \leq \nu \|y^k - \tilde{y}^k\|, \nu \in (0, 1),$$

式中, $0 < \beta_k < \beta_0 < +\infty$, $P_{\mathcal{R}_+^m}$ 表示 \mathcal{R}_+^m 的投影, $[P_{\mathcal{R}_+^m}(y)]_i = \max(y_i, 0)$, $i = 1, 2, \dots, m$, \tilde{x}_e^k 是由黑匣子给出的如下变分不等式问题

$$(x' - x)^T (F(x) + A^T \tilde{y}^k) \geq 0, \forall x' \in K \quad (5)$$

的解. 第二步是由当前点 (x_e^k, y^k) 和预测点 $(\tilde{x}_e^k, \tilde{y}^k)$ 构造方向和步长,得到一个新的迭代点. 注意到,虽然黑匣子能够给出变分不等式(3)的解,但是代价往往很高. 就交通拥堵道路收费问题来说,对于给定的收费 y ,用户需要花很长时间才能在新的环境里找到他们自己的最优线路. 即,整个网络需要花很长时间才能找到新的用户均衡点 x . 然而,新的用户均衡并不意味着一定是系统最优. 用户均衡的交通网络的总成本可能要比系统最优时的高. 因此,需要通过调整收费最终达到用户均衡和系统最优一致. 而精确求解(3)花费大,尤其当收费 y 与最优收费距离较远时,精确求解(3)的意义就更小. 基于以上分析,Han 等^[10]拓展了 Yang 等^[9]的方法. 对于给定的当前点 (x_e^k, y^k) 得到预测向量 \tilde{y}^k ,他们并不需要黑匣子给出子问题(5)的精确解,只要非精确解即可. 尽管文献[10]中,已经非精确求解子问题(5),但子问题(4)仍然需要精确求解. 沿着这个思路,Dong 等^[12]利用非精确策略求解(4),在与文献[10]相同的条件下,得到新算法的全局收敛性,最后的数值实验也表明了算法的有效性.

对这一类变分不等式问题的研究,早期的学者更多关注的是算法的数值效果,很少有从理论上研究算法的收敛速度. 前期对无约束的算子未知的变分不等式问题,Kou 等^[13]在算子强单调的情况下,给出了 Han 等^[10]所提出算子分裂法的收敛率分析. 基于他们的算法,文[14]进一步给出了单调算子情况下的次线性收敛率分析. 在变分不等式框架下,对带线性约束的可分凸优化问题,He 等^[15-16]分别给出了交替方向法和算子分裂法在遍历和非遍历意义下的收敛率分析. 但算子未知的带线性约束的变分不等式问题的预测校正方法^[9-10,12]的收敛率一直未被研究. 值得一提的是,误差界条件^[17]作为衡量迭代点到解集的距离与连续两个迭代点之间距离关系的一个不等式,近年来被广泛应用于分析强凸^[18],凸^[19]和非凸^[20]可分优化问题的线性收敛速度. 因此,本文将基于 Dong 等^[12]提出的预测校正方法,利用误差界条件来分析它的线性收敛速度. 最后,数值实验展示了算法的有效性.

1 预备知识

本节将介绍有关误差界条件、投影算子等基本概念与性质.

首先,对 \mathcal{R}^n 中的任意两个向量 x 和 y ,用 $x^T y$ 表示 Euclidean 空间中的内积, $\|x\| = \sqrt{x^T x}$ 为向量 $x \in \mathcal{R}^n$ 的 Euclidean-范数. 对任一矩阵 $A \in \mathcal{R}^{m \times n}$,用 A^T 表示它的转置. 对 \mathcal{R}^n 上的任一子集 $\Omega \subset \mathcal{R}^n$ 以及任意一点 $x \in \mathcal{R}^n$, x 到 Ω 上的距离记为 $\text{dist}(x, \Omega) = \inf_{y \in \Omega} \|y - x\|$. 值得注意的是,如果 Ω 是 \mathcal{R}^n 上的非空闭凸集,求解变

分不等式

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)^T \mathbf{F}(\mathbf{x}^*) \geq 0, \forall \mathbf{x} \in \Omega,$$

等价于求解投影方程

$$\mathbf{x} = P_{\Omega}(\mathbf{x} - \beta \mathbf{F}(\mathbf{x})),$$

式中, $\beta > 0$, $P_{\Omega}(\cdot)$ 表示 Euclidean-范数下的投影, 即

$$P_{\Omega}(\mathbf{y}) = \arg \min \{ \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \mid \mathbf{x} \in \Omega \}.$$

每计算一次投影, 相当于求解一个约束二次规划问题. 因此, 投影的计算并不容易. 但在很多实际应用中, 约束集 Ω 的结构比较简单, 很容易得到 Euclidean-范数下投影的显式解, 具体见文献[4]. 此外, 若集合 Ω 是闭凸集, 则投影到 Ω 上的点是唯一的. 接下来, 给出投影的一些有用的性质和单调算子的概念.

引理 1 令 $\Omega \subset \mathcal{R}^n$ 为一非空闭凸集, 则有

$$(\mathbf{u} - P_{\Omega}(\mathbf{u}))^T (\mathbf{v} - P_{\Omega}(\mathbf{u})) \leq 0, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{R}^n, \forall \mathbf{v} \in \Omega;$$

$$\|P_{\Omega}(\mathbf{u}) - P_{\Omega}(\mathbf{v})\| \leq \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{R}^n;$$

$$\|P_{\Omega}(\mathbf{u}) - \mathbf{v}\|^2 \leq \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u} - P_{\Omega}(\mathbf{u})\|^2, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{R}^n, \forall \mathbf{v} \in \Omega.$$

定义 1 给定 $\Omega \subset \mathcal{R}^n$ 和算子 $\mathbf{F}: \Omega \rightarrow \mathcal{R}^n$,

(1) 如果 $(\mathbf{x} - \mathbf{y})^T (\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{y})) \geq 0, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega$ 成立, 则称 $\mathbf{F}(\cdot)$ 是单调的.

(2) 如果存在常数 $\mu > 0$, 使得

$$(\mathbf{x} - \mathbf{y})^T (\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{y})) \geq \mu \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega,$$

成立, 则称 $\mathbf{F}(\cdot)$ 是强单调的.

(3) 如果存在常数 $L > 0$, 满足如下不等式

$$\|\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{y})\| \leq L \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega,$$

成立, 则称 $\mathbf{F}(\cdot)$ 在 Ω 上是 L -Lipschitz 连续的.

在后面的分析中, 始终假设算子 \mathbf{F} 是连续且强单调. 这就意味着带有线性约束的变分不等式(1)有唯一解且其解集 Ω^* 非空^[4].

令 $\mathbf{u} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$, 定义

$$e(\mathbf{u}, \beta) := \begin{cases} e_x(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \beta) := \mathbf{x} - P_{\mathcal{K}}(\mathbf{x} - \beta(\mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{A}^T \mathbf{y})), & (6a) \\ e_y(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \beta) := \mathbf{y} - P_{\mathcal{R}_+^m}(\mathbf{y} + \beta(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b})). & (6b) \end{cases}$$

求解(2)等价于求 $e(\mathbf{u}, \beta) = 0$ 的根. 对于给定的 $\mathbf{u} \in \mathcal{R}^n$, 下面的引理给出了 $\|e(\mathbf{u}, \beta)\|$ 是关于 β 的非减函数, 而 $\frac{\|e(\mathbf{u}, \beta)\|}{\beta}$ 是关于 β 的非增函数.

引理 2 对任意 $\mathbf{u} \in \mathcal{R}^n$ 和 $\tilde{\beta} \geq \beta > 0$, 则有

$$\|e(\mathbf{u}, \tilde{\beta})\| \geq \|e(\mathbf{u}, \beta)\|,$$

和

$$\frac{\|e(\mathbf{u}, \tilde{\beta})\|}{\tilde{\beta}} \leq \frac{\|e(\mathbf{u}, \beta)\|}{\beta}.$$

为后续分析算法线性收敛性的需要, 下面还需要给出常见的误差界条件^[17].

假设 1 设 Ω 是 \mathcal{R}^n 上的有界非空集合, 则存在 $\rho > 0$ 满足

$$\text{dist}(\mathbf{u}, \Omega^*) \leq \rho \|e(\mathbf{u}, 1)\|, \quad \forall \mathbf{u} \in \Omega.$$

注 1 引理 2 隐含了对任意给定的 $\beta > 0$, 均有

$$\|e(\mathbf{u}, 1)\| \leq \max\left\{\beta, \frac{1}{\beta}\right\} \|e(\mathbf{u}, \beta)\|.$$

因此, 对任意给定的 $\beta > 0$, 均有

$$\text{dist}(\mathbf{u}, \Omega^*) \leq \rho \max\left\{\beta, \frac{1}{\beta}\right\} \|e(\mathbf{u}, \beta)\|.$$

方便起见, 在线性收敛性的分析过程中, 取 $\beta = 1$.

2 全局收敛性和线性收敛性

为后面分析收敛性需要,本节正式给出 Dong 等^[12]的算法. 假设 $\mathbf{x}_e^k, \mathbf{x}^k$ 分别是如下变分不等式

$$(\mathbf{x}' - \mathbf{x})^T (\mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{A}^T \mathbf{y}^k) \geq 0, \quad \forall \mathbf{x}' \in K, \quad (7)$$

的精确解和近似解,且 $\bar{\mathbf{x}}_e^k, \bar{\mathbf{x}}^k$ 分别是

$$(\mathbf{x}' - \mathbf{x})^T (\mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{A}^T \bar{\mathbf{y}}^k) \geq 0, \quad \forall \mathbf{x}' \in K. \quad (8)$$

的精确解和近似解. 完整起见,列出如下的算法.

算法 1 带有非精确策略的预测校正方法

步 0 任取初始点 $\mathbf{y}^0 \in R_+^m$, 选择 $\varepsilon > 0, l \in (0, 1), \nu \in (0, 1), \beta_0 > 0, 0 < \tau_l < \tau_u < 2$ 和两个非负序列 $\{\eta_k\}, \{\alpha_k\}$ 满足

$$\sum_{k=0}^{\infty} \eta_k < +\infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k < +\infty \quad (9)$$

令 $k := 0$.

步 1 对于 \mathbf{y}^k , 找一个最小的非负整数 m_k , 使得 $\beta_k = \beta_0 l^{m_k}$ 满足

$$\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}_e^k\| \leq \eta_k \|\mathbf{y}^k - \bar{\mathbf{y}}^k\|, \quad (10)$$

$$\bar{\mathbf{y}}^k = P_{R_+^m}(\mathbf{y}^k + \beta_k(\mathbf{A}\mathbf{x}^k - \mathbf{b})),$$

$$\|\bar{\mathbf{x}}^k - \bar{\mathbf{x}}_e^k\| \leq \alpha_k \|\mathbf{y}^k - \bar{\mathbf{y}}^k\|, \quad (11)$$

和

$$\beta_k \|\mathbf{A}(\mathbf{x}^k - \bar{\mathbf{x}}^k)\| \leq \nu \|\mathbf{y}^k - \bar{\mathbf{y}}^k\|, \nu \in (0, 1). \quad (12)$$

步 2 任选 $\tau_k \in [\tau_l, \tau_u]$, 计算

$$\mathbf{y}_I^{k+1} = P_{R_+^m}(\mathbf{y}^k - \gamma_k d(\mathbf{y}^k, \beta_k)),$$

和

$$\mathbf{y}_{II}^{k+1} = P_{R_+^m}(\mathbf{y}^k + \gamma_k \beta_k (\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}^k - \mathbf{b})),$$

式中,

$$\gamma_k = \frac{\tau_k (\mathbf{y}^k - \bar{\mathbf{y}}^k)^T d(\mathbf{y}^k, \beta_k)}{\|d(\mathbf{y}^k, \beta_k)\|^2}, \quad (13)$$

$$d(\mathbf{y}^k, \beta_k) = \mathbf{y}^k - \bar{\mathbf{y}}^k + \beta_k \mathbf{A}(\mathbf{x}^k - \bar{\mathbf{x}}^k). \quad (14)$$

步 3 如果 $\|e_y(\mathbf{x}^k, \mathbf{y}^k, \beta_k)\| \leq \varepsilon$, 停止; 否则, 令 $k := k+1$, 转步 1.

已有的收敛性结论, 具体的证明细节见文献[12]. 为进一步分析其线性收敛性, 下面列出收敛性的相关引理和定理. 首先, 对算法 1, 给出如下引理.

引理 3 假设 \mathbf{F} 是模为 μ 的强单调算子, 则

$$(\bar{\mathbf{y}}^k - \mathbf{y}^k)^T \mathbf{A}(\mathbf{x}_e^k - \bar{\mathbf{x}}_e^k) \geq \mu \|\mathbf{x}_e^k - \bar{\mathbf{x}}_e^k\|^2, \quad (15)$$

和

$$\|\mathbf{x}_e^k - \bar{\mathbf{x}}_e^k\| \leq \frac{\|\mathbf{A}\|}{\mu} \|\mathbf{y}^k - \bar{\mathbf{y}}^k\|. \quad (16)$$

引理 4 假设 \mathbf{y}^k 不是(2b)的解. 则对任意的 $\beta_k \leq \frac{\mu\nu}{\|\mathbf{A}\|(\|\mathbf{A}\| + \mu(\eta_k + \alpha_k))}$, (12)成立.

说明 分别令式(3)中的 $\mathbf{y} = \mathbf{y}^k, \bar{\mathbf{y}}^k$, 结合它们对应的解 $\mathbf{x}_e^k, \bar{\mathbf{x}}_e^k$, 可得引理 3 的结论. 再结合算法 1 中的不等式(10)-(11), 可以得到引理 4 的结论.

引理 5 由(14)定义的方向 $d(\mathbf{y}^k, \beta_k)$ 满足

$$(\mathbf{y}^k - \mathbf{y}^*)^T d(\mathbf{y}^k, \beta_k) \geq (\mathbf{y}^k - \bar{\mathbf{y}}^k)^T d(\mathbf{y}^k, \beta_k) + \beta_k (\bar{\mathbf{y}}^k - \mathbf{y}^*)^T \mathbf{A}(\bar{\mathbf{x}}_e^k - \bar{\mathbf{x}}^k), \quad (17)$$

式中, \mathbf{y}^* 是(2b)的任意解.

引理 6 方向 $-\beta_k(\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}^k - \mathbf{b})$ 满足如下不等式

$$(\mathbf{y}^k - \mathbf{y}^*)^T (-\beta_k(\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}^k - \mathbf{b})) \geq (\mathbf{y}^k - \bar{\mathbf{y}}^k)^T (-\beta_k(\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}^k - \mathbf{b})) + \beta_k (\bar{\mathbf{y}}^k - \mathbf{y}^*)^T \mathbf{A}(\bar{\mathbf{x}}_e^k - \bar{\mathbf{x}}^k), \quad (18)$$

式中, \mathbf{y}^* 是(2b)的任意解.

引理 7 设 \mathbf{y}^* 是(2b)的任意解,由算法 1 产生的序列 $\{\mathbf{y}^k\}$ 满足

$$\|\mathbf{y}^{k+1}-\mathbf{y}^*\|^2 \leq \|\mathbf{y}^k-\mathbf{y}^*\|^2 - 2\gamma_k d(\mathbf{y}^k, \beta_k)^T (\mathbf{y}^k - \tilde{\mathbf{y}}^k) - 2\gamma_k \beta_k (\tilde{\mathbf{y}}^k - \mathbf{y}^*)^T \mathbf{A} (\tilde{\mathbf{x}}_e^k - \tilde{\mathbf{x}}^k) + \gamma_k^2 \|d(\mathbf{y}^k, \beta_k)\|^2.$$

说明 根据引理 1 和引理 3,可直接得出引理 5、引理 6 的结论. 利用投影算子的非扩张性,再结合不等式 $2u^T v \leq au^2 + \frac{1}{a}v^2, (a>0)$, 可得引理 7.

下面,给出算法 1 的收敛性结果. 在证明收敛性之前,首先给出序列 $\{\mathbf{y}^k\}$ 的有界性.

定理 1 由算法 1 产生的序列 $\{\mathbf{y}^k\}$ 有界.

说明 根据引理 7 以及算法中的定义及相关不等式,可以得到定理 1. 具体可见文献[12].

注 2 令算法 1 中的不等式(10) $\mathbf{x}_e^k = \mathbf{x}^*, \tilde{\mathbf{y}}^k = \mathbf{y}^*$. 因此,得到

$$\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\| \leq \eta_k \|\mathbf{y}^k - \mathbf{y}^*\|, \quad (19)$$

这就意味着序列 $\{\mathbf{x}^k\}$ 也是有界的.

定理 2 由算法 1 产生的序列 $\{\mathbf{y}^k\}$ 收敛到(2b)的解.

证明 根据文献[12]中定理 1 的证明过程,

$$c = \left(\frac{(2-\tau_u)\tau_l(1-\nu)}{2} - \left(2 + \frac{\beta_0^2 \tau_u^2 \|\mathbf{A}\|^2}{(1-\nu)^2} \right) \alpha_k \right).$$

我们得到

$$\begin{aligned} c \|\mathbf{y}^k - \tilde{\mathbf{y}}^k\|^2 &\leq (\|\mathbf{y}^k - \mathbf{y}^*\|^2 - \|\mathbf{y}^{k+1} - \mathbf{y}^*\|^2) + 2\alpha_k \|\mathbf{y}^k - \mathbf{y}^*\|^2. \\ c \sum_{k=K}^{\infty} \|\mathbf{y}^k - \tilde{\mathbf{y}}^k\|^2 &\leq \sum_{k=K}^{\infty} (\|\mathbf{y}^k - \mathbf{y}^*\|^2 - \|\mathbf{y}^{k+1} - \mathbf{y}^*\|^2) + 2 \sum_{k=K}^{\infty} \alpha_k \|\mathbf{y}^k - \mathbf{y}^*\|^2 \leq \\ &\|\mathbf{y}^K - \mathbf{y}^*\|^2 + 2 \sum_{k=K}^{\infty} \alpha_k \|\mathbf{y}^k - \mathbf{y}^*\|^2 < +\infty, \end{aligned} \quad (20)$$

式中,最后一个不等式根据序列 $\{\mathbf{y}^k\}$ 的有界性和 α_k 的定义. 因此,可以推出

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{y}^k - \tilde{\mathbf{y}}^k\| = 0. \quad (21)$$

根据(19)及 $\{\mathbf{y}^k\}$ 的有界性,可以得到序列 $\{\mathbf{x}^k\}$ 的有界性. 因为 $\{\mathbf{y}^k\}$ 有界,所以 $\{\mathbf{y}^k\}$ 至少有一个聚点. 不妨设其为 $\bar{\mathbf{y}} \in \mathcal{R}_+^m$, 且让相应的子列 $\{\mathbf{y}^{k_j}\}$ 收敛到 $\bar{\mathbf{y}}$. 同理,对于序列 $\{\mathbf{x}^k\}$, 令 $\bar{\mathbf{x}} \in K$ 为一聚点,也有相应的子列 $\{\mathbf{x}^{k_j}\}$ 收敛到 $\bar{\mathbf{x}}$.

根据 $e(\cdot, \beta)$ 的连续性和 $\beta_k \geq \beta$ (见引理 4 和引理 1), 得到

$$\|e_y(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}, \beta)\| = \lim_{j \rightarrow \infty} \|e_y(\mathbf{x}^{k_j}, \mathbf{y}^{k_j}, \beta)\| \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \|e_y(\mathbf{x}^{k_j}, \mathbf{y}^{k_j}, \beta_k)\| = \lim_{j \rightarrow \infty} \|\mathbf{y}^b - \mathbf{y}^{b1}\| = 0, \text{ 由此表明 } \bar{\mathbf{y}} \text{ 是(2b)的解.}$$

对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 根据 $\mathbf{y}^{k_j} \rightarrow \bar{\mathbf{y}}$ 和 $\sum_{k=0}^{\infty} (1+2\alpha_k) < +\infty$, 我们可以推出存在常数 $l > 0$ 使得对任意的 $k_l \geq K$, 都有 $\|\mathbf{y}^{k_l} - \bar{\mathbf{y}}\| < \frac{\varepsilon}{2}$ 和 $\sum_{k=k_l}^{\infty} (1+2\alpha_k) < 4$ 成立.

由于 \mathbf{y}^* 是(2b)的解,在上述分析中,令 $\mathbf{y}^* = \bar{\mathbf{y}}$. 因此,对任意的 $k \geq k_l$, 根据定理 1 和上述不等式,得到

$$\|\mathbf{y}^{k+1} - \bar{\mathbf{y}}\| \leq \prod_{k=k_l}^{\infty} \sqrt{1+2\alpha_k} \cdot \|\mathbf{y}^{k_l} - \bar{\mathbf{y}}\| < \varepsilon, \text{ 即, 序列 } \{\mathbf{y}^k\} \text{ 收敛到 } \bar{\mathbf{y}}.$$

接下来,在收敛性的基础上,利用误差界条件进一步给出算法产生的序列是线性收敛到原问题的解.

定理 3 由算法 1 产生的序列 $\{\mathbf{y}^k\}$ 线性收敛到(2b)的解.

证明 设 $\mathbf{u}^* := (\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \in \Omega^*$ 且有 $\text{dist}(\mathbf{u}^k, \Omega^*) = \|\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^*\|$, 利用假设 1, 得到

$$\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2 + \|\mathbf{y}^k - \mathbf{y}^*\|^2 \leq \rho^2 (\|\mathbf{x}^k - P_K[\mathbf{x}^k - (F(\mathbf{x}^k) + \mathbf{A}^T \mathbf{y}^k)]\|^2 + \|\mathbf{y}^k - P_{R_+^m}[\mathbf{y}^k + (\mathbf{A} \mathbf{x}^k - \mathbf{b})]\|^2).$$

根据非精确准则(10)和 $\tilde{\mathbf{y}}^k$ 的定义,进一步得到

$$\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2 + \|\mathbf{y}^k - \mathbf{y}^*\|^2 \leq \rho^2 (1 + \eta_k^2) \|\mathbf{y}^k - \tilde{\mathbf{y}}^k\|^2. \quad (22)$$

由(20),可以得到

$$\|\mathbf{y}^{k+1} - \mathbf{y}^*\|^2 \leq (1 + 2\alpha_k) \|\mathbf{y}^k - \mathbf{y}^*\|^2 - c \|\mathbf{y}^k - \tilde{\mathbf{y}}^k\|^2. \quad (23)$$

通过合并不等式(22)和(23),得到

$$\|y^{k+1}-y^*\|^2\leq C\|y^k-y^*\|^2,$$

式中, $C=1+2\alpha_k-\frac{1}{\rho^2(1+\eta_k^2)}c$. 根据 $\sum_{k=0}^{\infty}\eta_k<+\infty$, $\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k<+\infty$, 则一定存在正整数 $K>0$, 当 $k>K$ 时, 有 $\alpha_k=0$ 和 $\eta_k=0$ 成立. 若 $\rho>\sqrt{\frac{(2-\tau_u)\tau_l(1-\nu)}{2}}$, 则参数 C 满足 $0<C<1$. 因此, $\{y^k\}$ 线性收敛到 y^* .

3 数值实验

本节通过两个数值例子来比较算法 1 与文献[9-10]中算法, 分别将其命名为 MIPC, EPC 和 IPC. 这两个例子都来自交通均衡问题中带容量约束的交通拥堵收费问题. 例 1 来自文献[12], 其中路段出行成本函数和需求函数都是可分的. 例 2 同样来自[12], 是更一般的非对称不可分的路段出行成本函数. 两个例子在实验过程中涉及到的相关函数以及参数选择与文献[12]一样, 不再赘述. 考虑到求解(2b)等价于寻找投影方程(6b)的零点. 因此, 对任意给定的 $\varepsilon>0$, 我们使用 $\|e_y(x^k, y^k, 1)\|_{\infty}\leq\varepsilon$ 作为停机准则. 本文的算法采用 Matlab 编程实现, 运行环境为 MATLAB2020a. 所有的数值实验均在个人计算机上运行, 计算机处理器型号: Intel(R) Core(TM) i7-1165G7, 主频: 2.80GHz, 内存: 16.0GB.

例 1 外迭代 y 与内迭代 \bar{y} 的变化能够反映收费调整的频率, 频繁的调整收费将不利于整个交通均衡系统的稳定. 由[12]的结果可以看出, 对每个外迭代步, 精确算法和非精确算法几乎需要相同的内试探步. 因此, 我们主要考虑不同精度的外迭代次数的变化. 由表 1, 可以看到:

- (1) 无论是哪种方法, 迭代次数随着 ε 的减小而增加.
- (2) EPC 与 IPC 两种方法的第 II 种更新策略要比第 I 种更新策略的外迭代次数少, 而 MIPC 的两种更新策略所需要的迭代次数差不多, 这也表明 MIPC 的数值结果更稳定.
- (3) 就同一个 ε 而言, MIPC 要比 IPC, EPC 需要更少的迭代次数, 进一步展示了非精确策略的优势.

例 2 与例 1 类似, 针对更一般的非对称不可分的交通网络, 表 2 也展示了算法 MIPC 的优越性. 基于本文的理论结果, 为进一步说明 MIPC 的优越性, 我们通过图 1 展示了算法的线性效果. 图 1 中, 横坐标表示外迭代次数, 纵坐标表示 $\log(\|y^k-y^*\|)$ 的值. 从图 1 可以看出, MIPC 优于 IPC 和 EPC.

表 1 算例 1 三种算法的外迭代次数比较

Table 1 Comparison of the number of outer iterations of the three algorithms in Example 1

算法	更新方案	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}
EPC	I	50	79	95
	II	39	51	62
IPC	I	23	31	33
	II	17	24	27
MIPC	I	14	18	22
	II	14	17	20

表 2 算例 2 三种算法的外迭代次数比较

Table 2 Comparison of the number of outer iterations of the three algorithms in Example 2

算法	更新方案	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}
EPC	I	219	310	377
	II	159	228	283
IPC	I	65	83	109
	II	52	82	100
MIPC	I	50	67	88
	II	46	71	86

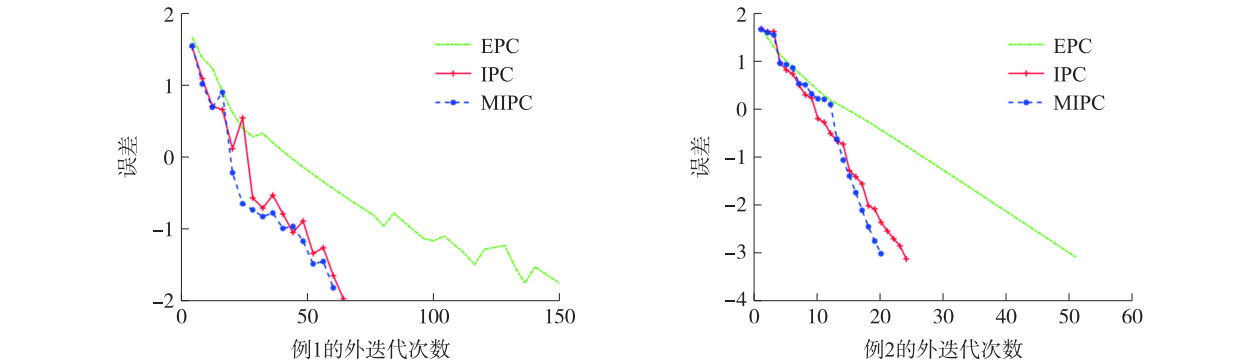


图 1 算法 1 分别针对两个例子的比较结果

Fig. 1 The results of the comparison of the two examples in algorithm 1 respectively

4 结论

本文主要考虑了一类带线性约束的算子未知的变分不等式模型及算法. 在算子 F 强单调的情况下, 利用误差界条件分析了算法的线性收敛性. 最后, 通过两个数值实验展示了算法的稳定性和有效性.

[参考文献]

- [1] DAFERMOS S. Traffic equilibrium and variational inequalities[J]. Transportation science, 1980, 14(1): 42–54.
- [2] BERTSEKAS D P, GAFNI E M. Projection methods for variational inequalities with application to the traffic assignment problem[J]. Mathematical programming study, 1982, 17(16): 139–159.
- [3] NAGURNEY A. Network Economics: a variational inequality approach[M]. New York: Kluwer Academic Publishers, 1993.
- [4] FACCHINEI F, PANG J S. Finite-dimensional variational inequalities and complementarity problems[M]. Berlin: Springer Verlag, 2003.
- [5] HAN D R, SUN W Y. A new modified Goldstein-Levitin-Polyak projection method for variational inequality problems[J]. Computers and mathematics with applications, 2004, 47(12): 1817–1825.
- [6] HAN D R, HE B S. A new accuracy criterion for approximate proximal point algorithms[J]. Journal of mathematical analysis and applications, 2001, 263(2): 343–354.
- [7] HAN D R, XU W, YANG H. An operator splitting method for variational inequalities with partially unknown mappings[J]. Numerische mathematik, 2008, 111(2): 207–237.
- [8] WARDROP J G. Discussion: Some theoretical aspects of road traffic research[J]. Proceedings of the institution of civil engineers, part II, 1952, 1: 325–378.
- [9] YANG H, XU W, HE B S. Road pricing for congestion control with unknown demand and cost functions[J]. Transportation research part C: emerging technologies, 2010, 18(2): 157–175.
- [10] HAN D R, XU W, YANG H. Solving a class of variational inequalities with inexact oracle operators[J]. Mathematical methods of operations research, 2010, 71(3): 427–452.
- [11] GE Z L, HAN D R, NI Q, et al. An operator splitting method for monotone variational inequalities with a new perturbation strategy[J]. Optimization letters, 2018, 12(1): 103–122.
- [12] DONG X M, CAI X J, HAN D R, et al. Solving a class of variational inequality problems with a new inexact strategy[J]. Asia-pacific journal of operational research, 2020, 37(1): 20.
- [13] KOU X P, LI S J. On non-ergodic convergence rate of the operator splitting method for a class of variational inequalities[J]. Optimization letters, 2017, 11(1): 71–80.
- [14] 葛志利, 蔡邢菊, 张欣. 算子分裂法求解一类变分不等式问题的收敛率分析[J]. 南京师大学报(自然科学版), 2020, 43(1): 5–12.
- [15] HE B S, YUAN X M. On the $O(1/n)$ Convergence rate of the Douglas-Rachford alternating direction method[J]. SIAM journal on numerical analysis, 2012, 50(2): 700–709.
- [16] HE B S, YUAN X M. On the convergence rate of Douglas-Rachford operator splitting method[J]. Mathematical programming, 2015, 153(2): 715–722.
- [17] TSENG P. Error bounds and superlinear convergence analysis of some newton-type methods in optimization[M]. Boston, MA: Springer, 2000.
- [18] DENG W, YIN W T. On the global and linear convergence of the generalized alternating direction method of multipliers[J]. Journal of scientific computing, 2016, 66(3): 889–916.
- [19] PENG J W, ZHANG X Q. Linear convergence rate of the generalized alternating direction method of multipliers for a class of convex minimization problems[J]. Journal of nonlinear and convex analysis, 2022, 23(8): 1559–1575.
- [20] JIA Z H, GAO X, CAI X J, et al. Local linear convergence of the alternating direction method of multipliers for nonconvex separable optimization problems[J]. Journal of optimization theory and applications, 2021, 188(1): 1–25.

[责任编辑: 陆炳新]