doi:10.3969/j.issn.1001-4616.2024.03.003

# 一般有界区域上高维变权 p-Laplacian 问题保号解的存在性

沈文国

(广东科技学院通识教育学院,广东 东莞 523083)

[摘要] 研究一般有界区域上高维变权 p-Laplacian 方程 $-\mathrm{div}(\varphi_p(\nabla u))=\gamma m(x)f(u)$, $u(x)=0, x\in\partial\Omega$ 保号解的存在性. 其中 $\Omega$ 是 $\mathbb{R}^N$ 上的一个有界且在其边界上光滑的区域, $m(x)\in C(\bar{\Omega})$, $\gamma$ 是一个参数, $f\in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$, 对于 $s\neq 0$ 满足 $sf(s)>0$. 当满足 $f_0\notin(0,\infty)$ 或 $f_\infty\notin(0,\infty)$ (其中 $f_0=\lim_{|s|\to 0}f(s)/\varphi_p(s)$, $f_\infty=\lim_{|s|\to\infty}f(s)/\varphi_p(s)$), 且 $\gamma\neq 0$ 属于一定区间时,本文研究上述高维 p-Laplacian 方程保号解的存在性. 我们用全局分歧技巧和连通序列集取极限的方法获得主要结果.

[关键词] 单侧全局分歧,一般区域上高维变权 p-Laplacian 方程,保号解
[中图分类号]O175.8 [文献标志码]A [文章编号]1001-4616(2024)03-0015-06

## Existence of One-sign Solutions to the High-Dimensional Sign-Changing Weight p-Laplacian on General Domain

Shen Wenguo

(College of General Education, Guangdong University of Science and Technology, Dongguan 523083, China)

**Abstract**: In this paper, we shall study the existence of one-sign solutions for thep-Laplacian problem: $-\mathrm{div}(\varphi_p(\nabla u))=\gamma m(x)f(u)$, $u(x)=0, x\in\partial\Omega$, where $\Omega$ is a bounded domain in $\mathbb{R}^N$ with a smooth boundary $\partial\Omega$, and $m(x)\in C(\bar{\Omega})$ is a sign changing function, $\gamma$ is a parameter, $f\in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $sf(s)>0$ for $s\neq 0$. Based on the bifurcation result of Dai et al. [9, Theorem 5.1], we give the intervals for the parameter $\gamma\neq 0$ which ensure the existence of one-sign solutions for the above high-dimensional p-Laplacian problems if $f_0\notin(0,\infty)$ or $f_\infty\notin(0,\infty)$, where $f_0=\lim_{|s|\to 0}f(s)/\varphi_p(s)$, $f_\infty=\lim_{|s|\to\infty}f(s)/\varphi_p(s)$. We use unilateral global bifurcation techniques and the approximation of connected components to prove our main results.

**Key words**: unilateral global bifurcation, high-dimensional sign-changing weight p-Laplacian problems on general domain, one-sign solutions

应用 Rabinowitz 分歧定理[1],Del Pino 等[2]研究了一类 p-Laplacian 问题解的存在性问题. 应用分歧定理[3],文[4]建立了全空间 $\mathbb{R}^N$ 上一类高维问题解的 Dancer-型分歧定理. 文[5]建立了有界区域上一类高维 p-Laplacian 问题的解的 Dancer-型单侧全局分歧定理,应用分歧技巧[6],代国伟等[7]研究了径向结点解的存在性,代国伟等[8]也研究了 p-Laplacian 问题解的存在性问题. 然而,关于高维变权分歧问题研究较少.

2014 年,代国伟等[9]研究了下列一般区域上高维变权椭圆方程保号解的存在性问题:

$$\begin{cases}-\mathrm{div}(\varphi_p(\nabla u))=\gamma m(x)f(u), & x\in\Omega,\\ u(x)=0, & x\in\partial\Omega,\end{cases}\tag{1}$$

式中, $\gamma$ 是一个参数, $\Omega$ 是 $\mathbb{R}^N$ 上的一个有界且在其边界上光滑的区域, $N\geq 2$, $1<p<+\infty$, $\varphi_p(s)=|s|^{p-2}s$, $m(x)\in M(\Omega)$ 是一个变号函数且

收稿日期:2022-10-08.
基金项目:国家自然科学基金项目(11561038).
通讯作者:沈文国,博士,教授,研究领域:非线性泛函微分方程与分歧理论. E-mail:shenwg369@163.com

$$M(\Omega)=\{m(x)\in C(\overline{\Omega})\mid \mathrm{meas}\{x\in\Omega,m(x)>0\}\neq 0\}.$$

假设 $f\in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 满足如下条件

(A1)对于 $s\neq 0$ 满足 $sf(s)>0$.

(A2)存在 $f_0,f_\infty\in(0,\infty)$ 使得 $f_0=\lim\limits_{|s|\to 0}f(s)/\varphi_p(s)$, $f_\infty=\lim\limits_{|s|\to\infty}f(s)/\varphi_p(s)$.

首先考虑问题

$$\begin{cases}-\mathrm{div}(\varphi_p(\nabla u))=\lambda\gamma m(x)f(u), & x\in\Omega,\\ u(x)=0, & x\in\partial\Omega,\end{cases}\tag{2}$$

式中,$\lambda>0$ 是一个参数.

令 $\zeta\in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 使得成立

$$f(u)=f_0\varphi_p(u)+\zeta(u).$$

并且

$$\lim_{|u|\to 0}\zeta(u)/\varphi_p(u)=0.$$

考虑

$$\begin{cases}-\mathrm{div}(\phi_p(\nabla u))=\lambda\gamma m(x)f_0\phi_p(u)+\lambda\gamma m(x)\zeta(u), & x\in\Omega,\\ u(x)=0, & x\in\partial\Omega,\end{cases}\tag{3}$$

作为从平凡解 $u\equiv 0$ 发出的一个分歧问题.

令 $P^+=\{u\in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})\mid u(x)>0,\forall x\in\Omega\}$, $P^-=\{u\in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})\mid u(x)<0,\forall x\in\Omega\}$.

令 $X:=W^{1,\alpha}(\Omega)$,其上范数为 $\|x\|=\left(\int_\Omega|\nabla u|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}$.

令 $C$ 记为(2)非平凡解集在 $\mathbb{R}\times X$ 中的闭包,$C^\nu$ 为 $C$ 的子集,$u\in P^\nu$ 且 $C^\nu=C^+\cup C^-$.

代国伟等[9]应用[4]中定理获得如下引理:

**引理 1**[9]　令 $\nu\in\{+,-\}$. 存在从 $\left(\dfrac{\lambda_1^\nu(p)}{\gamma f_0},0\right)$ 分歧出的问题(2)解的两个无界连通分支 $C_+^\nu$ 和 $C_-^\nu$. 对于 $\sigma\in\{+,-\}$,使得:$C_\sigma^\nu\subset(\mathbb{R}\times P^\sigma)\cup\left\{\left(\dfrac{\lambda_1^\nu(p)}{\gamma f_0},0\right)\right\}$, $\nu\in\{+,-\}$,其中 $\lambda_1^\nu(p)$ 是下列变权问题的简单的,孤立的,唯一的主特征值(见文[4,10]):

$$\begin{cases}-\mathrm{div}(\varphi_p(\nabla u))=\lambda m(x)\varphi_p(u), & x\in\Omega,\\ u(x)=0, & x\in\partial\Omega.\end{cases}$$

文[9]研究了问题(1)保号解的存在性,并获得以下结果.

**引理 2**[9]　假设(A1)和(A2)成立,$m(x)\in M(\Omega)$. 假设下列两个条件之一成立

$$\gamma\in(\lambda_1^+(p)/f_\infty,\lambda_1^+(p)/f_0)\cup(\lambda_1^-(p)/f_0,\lambda_1^-(p)/f_\infty)$$

或

$$\gamma\in(\lambda_1^+(p)/f_0,\lambda_1^+(p)/f_\infty)\cup(\lambda_1^-(p)/f_\infty,\lambda_1^-(p)/f_0).$$

则问题(1)至少存在一个正解和一个负解.

自然会问,当 $f$ 满足 $f_0\notin(0,\infty)$ 或 $f_\infty\notin(0,\infty)$ 时,有什么结论成立.

本文假设 $f$ 满足(A1)和下列假设:

(H1) $f_0\in(0,\infty)$ 且 $f_\infty=\infty$.

(H2) $f_0=\infty$ 且 $f_\infty\in(0,\infty)$.

(H3) $f_0=0$ 且 $f_\infty\in(0,\infty)$.

(H4) $f_0\in(0,\infty)$ 且 $f_\infty=0$.

(H5) $f_0=0$ 且 $f_\infty=\infty$.

(H6) $f_0=\infty$ 且 $f_\infty=0$.

(H7) $f_0=\infty$ 且 $f_\infty=\infty$.

(H8) $f_0=0$ 且 $f_\infty=0$.

## 1 主要结果

介绍下列引理:

**引理 3**[11] 令 $X$ 是一个 Banach 空间,令$\{C_n|n=1,2,\cdots\}$是 $X$ 的一个闭连通子序列集. 假设

(i)存在 $z_n\in C_n,n=1,2,\cdots$和 $z^*\in X$,使得 $z_n\to z^*$;

(ii)$r_n=\sup\{\|x\|\,|x\in C_n\}=\infty$;

(iii)对所有 $R>0$,$(\cup_{n=1}^{\infty}C_n)\cap B_R$是 $X$ 中的相对紧集,其中

$$B_R=\{x\in X|\ \|x\|\leqslant R\}.$$

则在 $D$ 中,存在一个无界连通集 $C$ 且 $z^*\in C$,其中 $D:=\limsup_{n\to\infty}C_n=\{x\in X|\ \exists\{n_i\}\subset\mathbb{N},x_{n_i}\in C_n$,使得 $x_{n_i}\to x\}$.

假设(A1)和(A2)成立,$m(x)\in M(\Omega)$. 令 $\xi\in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$使得成立

$$f(u)=f_\infty\varphi_p(u)+\xi(u).$$

并且

$$\lim_{|u|\to\infty}\xi(u)/\varphi_p(u)=0.$$

考虑

$$\begin{cases}-\operatorname{div}(\varphi_p(\nabla u))=\lambda\gamma m(x)f_0\varphi_p(u)+\lambda\gamma m(x)\xi(u), & x\in\Omega,\\ u(x)=0, & x\in\partial\Omega,\end{cases}\tag{4}$$

作为从无穷远处发出的一个分歧问题.

在空间$\mathbb{R}\times X$ 中增加点$\{(\lambda,\infty)|\lambda\in\mathbb{R}\}$.

显然,问题(3)与问题(4)是相同的,且问题(3)与问题(4)都等价于问题(2).

由文[9],文[12]可得:

**引理 4** 假设(A1)和(A2)成立,$m(x)\in M(\Omega)$. 对于 $\nu\in\{+,-\}$,$\left(\frac{\lambda_1^\nu}{\gamma f_0},0\right)$和$\left(\frac{\lambda_1^\nu}{\gamma f_\infty},0\right)$都是问题(2)的分歧点. 进而,存在从$\left(\frac{\lambda_1^\nu}{\gamma f_0},0\right)$或$\left(\frac{\lambda_1^\nu}{\gamma f_\infty},\infty\right)$发出的问题(2)解的两个不同的无界连续统 $C_+^\nu$和 $C_-^\nu$,使得 $C_\sigma^\nu\subset(\mathbb{R}\times P^\sigma)\cup\left\{\left(\frac{\lambda_1^\nu}{\gamma f_0},0\right)\right\}$,对于 $\nu\in\{+,-\}$,$C_\sigma^\nu$连接$\left(\frac{\lambda_1^\nu}{\gamma f_0},0\right)$和$\left(\frac{\lambda_1^\nu}{\gamma f_\infty},0\right)$.

**注 1** 问题(2)的任何解$(1,u)$产生(1)的一个解 $u$. 为了证明主要结果,以下仅仅证明 $C_\sigma^\nu$ 在$\mathbb{R}\times X$ 中穿过平面$\{1\}\times X$ 即可.

本文主要结果如下:

**定理 1** 令(A1)和(H1)成立,且 $m\in M(\Omega)$. 假设

$$\gamma\in\left(0,\frac{\lambda_1^+}{f_0}\right)\cup\left(\frac{\lambda_1^-}{f_0},0\right).$$

则问题(1)至少存在一个正解和一个负解.

**证明** 由文[13],定义截断函数

$$f^{[n]}(s)=\begin{cases}f(s), & s\in[-n,n],\\ \dfrac{n\varphi_p(2n)-f(n)}{n}(s-n)+f(n), & s\in(n,2n),\\ \dfrac{-n\varphi_p(-2n)+f(-n)}{n}(s+n)+f(-n), & s\in(-2n,-n),\\ n\varphi_p(s), & s\in(-\infty,-2n]\cup[2n,+\infty).\end{cases}$$

考虑

$$\begin{cases}-\operatorname{div}(\varphi_p(\nabla u))=\lambda\gamma m(x)f^{[n]}(u), & x\in\Omega,\\ u(x)=0, & x\in\partial\Omega.\end{cases}\tag{5}$$

显然,可得 $\lim\limits_{n\to+\infty}f^{[n]}(s)=f(s)$,$(f^{[n]})_0=f_0$,和$(f^{[n]})_\infty=n$.

相似于引理 2[9] 的证明,由引理 4,对于 $\nu\in\{+,-\}$,存在从 $\left(\dfrac{\lambda_1^\nu}{\gamma f_0},0\right)$发出的问题(4)解的两个不同的无界子连续统 $D_+^{\nu[n]}$ 和 $D_-^{\nu[n]}$,使得 $D_\sigma^{\nu[n]}\subset(\mathbb{R}\times P^\sigma)\cup\left\{\left(\dfrac{\lambda_1^\nu}{\gamma f_0},0\right)\right\}$,$\nu\in\{+,-\}$,且 $D_\sigma^{\nu[n]}$ 连接$\left(\dfrac{\lambda_1^\nu}{\gamma f_0},0\right)$和$\left(\dfrac{\lambda_1^\nu}{\gamma n},\infty\right)$,其中 $\nu\in\{+,-\}$.

令 $z_n=\left(\dfrac{\lambda_1^\nu}{\gamma n},\infty\right)$,$z^*=(0,\infty)$,则 $z_n\to z^*$.

因此,$z^*=(0,\infty)$满足引理 3(i).

显然 $r_n=\sup\{\lambda+\|u\|_X\mid(\lambda,u)\in D_\sigma^{\nu[n]}\}=\infty$,

且引理 3(ii)成立. 由 Arezela-Ascoli 定理和$f^{[n]}$定义可直接推出引理 3(iii).

由 $\lim\limits_{n\to+\infty}f^{[n]}(s)=f(s)$,(5)等价于(2).

因此,由引理 3,$\limsup\limits_{n\to\infty}D_\sigma^{\nu[n]}$包括从$\left(\dfrac{\lambda_1^\nu}{\gamma f_0},0\right)$发出的问题(2)解的无界连续统 $D_\sigma^\nu$,且连接到$(0,\infty)$. 因为 $D_\sigma^{\nu[n]}\subset(\mathbb{R}\times P^\sigma)$,可得 $D_\sigma^\nu\subset(\mathbb{R}\times P^\sigma)$,其中 $\sigma\in\{+,-\}$.

进而,由注 1 可得 $D_\sigma^\nu$是一个从$\left(\dfrac{\lambda_1^\nu}{f_0},0\right)$发出的问题(1)的解的无界连续统,且连接到 $(0,\infty)$.

**定理 2**　令(A1)和(H2)成立,且 $m\in M(\Omega)$. 假设下式成立

$$\gamma\in\left(0,\frac{\lambda_1^+}{f_\infty}\right)\cup\left(\frac{\lambda_1^-}{f_\infty},0\right).$$

则问题(1)至少存在一个正解和一个负解.

**证明**　假设 $(\lambda,u)$ 是问题(2)的非平凡解,在问题(2)两边同除以 $\|u\|^{2(p-1)}$,令 $v=\dfrac{u}{\|u\|^2}$,则

$$\begin{cases}-\operatorname{div}(\varphi_p(\nabla v))=\lambda\gamma m(x)\dfrac{f(u)}{\|u\|^{2(p-1)}}, & x\in\Omega,\\ v(x)=0, & x\in\partial\Omega,\end{cases}\tag{6}$$

定义

$$\tilde{f}(v):=\begin{cases}\|v\|^{2(p-1)}f\left(\dfrac{v}{\|v\|^2}\right), & \text{if } v\neq0,\\ 0 & \text{if } v=0.\end{cases}$$

显然,问题(6)等价于

$$\begin{cases}-\operatorname{div}(\varphi_p(\nabla v))=\lambda\gamma m(x)\tilde{f}(v), & x\in\Omega,\\ v(x)=0, & x\in\partial\Omega,\end{cases}\tag{7}$$

显然,$(\lambda,0)$ 始终是问题(7)的解. 简单计算,可得 $\tilde{f}_0=f_\infty\in(0,\infty)$ 和 $\tilde{f}_\infty=f_0=\infty$. 应用定理 1,对于 $\nu\in\{+,-\}$,存在从$\left(\dfrac{\lambda_1^\nu}{\gamma f_0},0\right)$发出的问题(7)解的两个不同的无界连续统 $C_+^\nu$和 $C_-^\nu$,且连接到 $(0,\infty)$.

通过逆映射 $v\to\dfrac{v}{\|v\|^2}=u$,可得 $C_\sigma^\nu\to D_\sigma^\nu$ 是从(0,0)发出的问题(2)解的一个无界连续统,且连接到$\left(\dfrac{\lambda_1^\nu}{\gamma f_\infty},\infty\right)$. 因此,$D_\sigma^\nu$ 是从(0,0)发出的问题(1)解的一个无界连续统,且连接到$\left(\dfrac{\lambda_1^\nu}{f_\infty},\infty\right)$.

**定理 3**　令$(A1)$和$(H3)$成立,且 $m\in M(\Omega)$,假设下式成立

$$\gamma\in\left(\frac{\lambda_1^+}{f_\infty},+\infty\right)\cup\left(-\infty,\frac{\lambda_1^-}{f_\infty}\right).$$

则问题(1)至少存在一个正解和一个负解.

**证明** 定义

$$f^{[n]}(s)=\begin{cases}\dfrac{1}{n}\varphi_p(s), & s\in\left[-\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n}\right],\\ \left[f\left(\dfrac{2}{n}\right)-\dfrac{1}{n^p}\right](ns-2)+f\left(\dfrac{2}{n}\right), & s\in\left(\dfrac{1}{n},\dfrac{2}{n}\right),\\ -\left[f\left(-\dfrac{2}{n}\right)+\dfrac{1}{n^p}\right](ns+2)+f\left(-\dfrac{2}{n}\right), & s\in\left(-\dfrac{2}{n},-\dfrac{1}{n}\right),\\ f(s), & s\in\left(-\infty,-\dfrac{2}{n}\right]\cup\left[\dfrac{2}{n},+\infty\right).\end{cases}$$

考虑

$$\begin{cases}-\mathrm{div}(\varphi_p(\nabla u))=\lambda\gamma m(x)f^{[n]}(u), & x\in\Omega,\\ u(x)=0, & x\in\partial\Omega,\end{cases}\tag{8}$$

显然，可得 $\lim\limits_{n\to+\infty}f^{[n]}(s)=f(s)$，$(f^{[n]})_0=\dfrac{1}{n}$，和 $(f^{[n]})_\infty=f_\infty$.

应用相似于定理 1 的证明方法，由引理 3 可得存在一个从 $(\infty,0)$ 发出的问题(1)的解的无界连续统 $D_\sigma^\nu$，且连接到 $\left(\dfrac{\lambda_1^\nu}{f_\infty},\infty\right)$.

**定理 4** 令(A1)和(H4)成立，且 $m\in M(\Omega)$，假设下式成立

$$\gamma\in\left(\frac{\lambda_1^+}{f_0},+\infty\right)\cup\left(-\infty,\frac{\lambda_1^-}{f_0}\right).$$

则问题(1)至少存在一个正解和一个负解.

**证明** 应用相似于定理 2 的证明方法和定理 3 的结论，可得结果.

**定理 5** 令(A1)和(H5)成立，且 $m\in M(\Omega)$，假设下式成立

$$\gamma\in(0,+\infty)\cup(-\infty,0),$$

则问题(1)至少存在一个正解和一个负解.

**证明** 应用相似于定理 3 的证明方法，由引理 1 可得，存在一个从 $(\infty,0)$ 发出的问题(1)的解的无界连续统 $D_\sigma^\nu$，再由定理 1 的证明可得：$D_\sigma^\nu$ 连接 $(\infty,0)$ 到 $(0,\infty)$.

**定理 6** 令(A1)和(H8)成立，且 $m\in M(\Omega)$，假设下式成立

$$\gamma\in(0,+\infty)\cup(-\infty,0),$$

则问题(1)至少存在一个正解和一个负解.

**证明** 应用相似于定理 2 的证明方法和定理 5 的结论，可得结果.

**定理 7** 令(A1)和(H7)成立，且 $m\in M(\Omega)$，对于 $\nu\in\{+,-\}$，存在一个 $\nu\lambda_\nu^\nu>0$，使得 $\gamma\in(\lambda_-^-,0)\cup(0,\lambda_+^+)$. 则问题(1)至少存在一个正解和一个负解.

**证明** 应用相似于定理 2 的证明方法可得，存在一个从 $(0,0)$ 发出的问题(1)的解的无界连续统 $D_\sigma^\nu$，再由定理 1 的证明可得 $D_\sigma^\nu$ 连接 $(0,0)$ 到 $(0,\infty)$.

**定理 8** 令(A1)和(H8)成立，且 $m\in M(\Omega)$，对于 $\nu\in\{+,-\}$，存在一个 $\nu\lambda_\nu^\nu<0$，使得 $\gamma\in(-\infty,\lambda_-^-)\cup(\lambda_+^+,+\infty)$. 则问题(1)至少存在一个正解和一个负解.

**证明** 应用相似于定理 2 的证明方法和定理 7 的结论，可得结果.

## ［参考文献］

［1］ RABINOWITZ P H. Some aspects of nonlinear eigenvalue problems［J］. Rocky mountain journal of mathematics，1973(3)：161-202.

［2］ DEL PINO M，MANASEVICH R. Global bifurcation from the eigenvalues of the p-Laplacian［J］. Journal of differential equations，1991(92)：226-251.

[3] DANCER E N. On the structure of solutions of non-linear eigenvalue problems[J]. Indiana University mathematics journal, 1974(23):1069-1076.

[4] DRABEK P Y. Huang Bifurcation problems for the p-Laplacian in $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$[J]. Transactions of the American Mathemicatical Society, 1997(349):171-188.

[5] GIRG P, TAKAC P. Bifurcations of positive and negative continua in quasilinear elliptic eigenvalue problems[J]. Annales de L institut Henri poincare-analyse non lineaire, 2008(9):275-327.

[6] SCHMITT K, THOMPSON R. Nonlinear analysis and differential equations: an introduction, university of utah lecture notes[M]. Salt Lake City: University of Utah Press, 2000.

[7] DAI G, MA R, XU J. Global bifurcation and nodal solutions of N-dimensional p-Laplacian in unit ball[J]. Applicable analysis, 2013, 92(7):1345-1356.

[8] DAI G, MA R. Unilateral global bifurcation phenomena and nodal solutions for p-Laplacian[J]. Journal of differential equations, 2012, 252:2448-2468.

[9] DAI G, HAN X, MA R. Unilateral global bifurcation and nodal solutions for the p-Laplacian with sign-changing weight[J]. Complex variable and elliptic equations, 2014, 59(6):847-862.

[10] ALLEGRETTO W, HUANG Y X. Eigenvalues of the indefinite weight p-Laplacian in weighted $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ spaces[J]. Funkc ekvac, 1995(38):233-242.

[11] Ma R, An Y. Global structure of positive solutions for nonlocal boundary value problems involving integral conditions[J]. Nonlinear analysis-theory methods & applications, 2009(71):4364-4376.

[12] Rabinowitz P H. On bifurcation from infinity[J]. Journal of differential equations, 1973(14):462-475.

[13] Ambrosetti A, Calahorrano R M, Dobarro F R. Global branching for discontinuous problems[J]. Commentationes mathematicae universitatis carolinae, 1990(31):213-222.

[责任编辑:陆炳新]