

doi:10.3969/j.issn.1001-4616.2024.03.004

阻抗边界附近粘弹性球壳的动态声辐射力

臧雨宸

(南京师范大学物理科学与技术学院,江苏 南京 210023)

[摘要] 当入射声波包含多个不同的频率分量时,物体受到的声辐射力会含有随时间变化的动态分量,称为动态声辐射力. 动态声辐射力在医学成像、物质参数反演等领域得到了越发广泛的应用. 利用镜像原理,从理论上推导了双频率声波作用在阻抗边界附近的粘弹性球壳上时产生的动态声辐射力,并以合成树脂球壳为例进行计算. 结果显示:与稳态声辐射力相比,动态声辐射力在峰值处会出现劈裂现象,且劈裂后两峰的间距恰好等于两个无量纲频率之差,因而当两频率十分相近时可以将其近似为稳态声辐射力;增加边界声压反射系数可以明显提升动态声辐射力的峰值,而球壳与边界距离的变化则会使动态声辐射力出现周期性变化,且其变化周期刚好为半波长. 当球壳相对较薄时,由于空气的声阻抗远小于水,充气球壳的动态声辐射力会远强于充水球壳. 本文的计算结果预期可以为边界附近利用动态声辐射力进行声操控提供理论基础.

[关键词] 动态声辐射力,阻抗边界,粘弹性球壳,声操控

[中图分类号]O422.7 [文献标志码]A [文章编号]1001-4616(2024)03-0021-11

Dynamic Acoustic Radiation Force on a Viscoelastic Spherical Shell near an Impedance Boundary

Zang Yuchen

(School of Physics and Technology, Nanjing Normal University, Nanjing 210023, China)

Abstract: When the incident acoustic wave contains many different frequency components, the acoustic radiation force on the objects will have a dynamic component that changes with time, which is called the dynamic acoustic radiation force. Dynamic acoustic radiation has been widely used in medical imaging, parameter inversion and other relevant fields. Based on the image theory, the expression of the dynamic acoustic radiation force acting on a viscoelastic spherical shell near an impedance boundary for a dual-frequency wave is theoretically deduced. Numerical calculations for a viscoelastic lucite shell are provided as an example. The results show the splitting of the resonant peaks for the dynamic acoustic force, which produces two peaks that are separated by a dimensionless frequency shift equal to the modulation dimensionless frequency. Therefore, when the two frequencies are very close, the dynamic radiation force can be approximated as the steady radiation force. The increase of the boundary reflecting coefficient leads to the enhancement of the peak value of the dynamic acoustic radiation force. Moreover, the dynamic acoustic radiation force changes periodically along the variation of shell-boundary distance. When the spherical shell is relatively thin, the dynamic acoustic radiation force for the air-filled spherical shell is much stronger than that for the water-filled one because air has a much lower impedance than water. These results are expected to provide a theoretical basis for the acoustic manipulation near the boundary using the dynamic acoustic radiation force.

Key words: dynamic acoustic radiation force, impedance boundary, viscoelastic spherical shell, acoustic manipulation

声波可以携带一定动量. 当声波作用在物体上时,会将部分动量传递到物体上,在宏观上表现为声波对物体的作用力,称为声辐射力. 声辐射力在医学超声和材料科学等领域应用广泛,如声学镊子^[1-3]、超声造影^[4-6]、声悬浮^[7-8]等. 在许多场景下,声操控对象往往呈现为球形或可以近似为球形,如细胞、微泡和液滴,因此研究球形粒子在各种情况下的声辐射力是很有必要的. 1934年,King^[9]最早计算了平面行波对理想流体中刚性球的声辐射力. 1955年,Yosioka等^[10]利用Mie散射理论计算了弹性球的声辐射力. 随后,Hasegawa

收稿日期:2023-07-27.

基金项目:国家自然科学基金项目(81527901).

通讯作者:臧雨宸,博士,副研究员,研究方向:声操控. E-mail:zangyuchen@nnu.edu.cn

等^[11-12]从理论和实验两方面研究了弹性球的声辐射力特性. 20 世纪 90 年代,随着换能器技术的发展, Wu 等^[13]研究了聚焦声束作用下球形粒子的声辐射力,并首次提出了声学镊子的概念. Hasegawa 和 Mitri 等^[14-16]将声辐射力的操控对象拓展至壳层结构,计算了弹性和粘弹性球壳在行波与驻波作用下的声辐射力,并比较其结果与实心球体的异同. 2011 年, Miri 等^[17]首次计算了多孔血管壁附近弹性球壳的声辐射力,开创了边界附近声辐射力研究的先河. 随后, Wang 等^[18]研究了理想流体中驻波激励下平面附近刚性柱的声辐射力. 在此基础上, Qiao 等^[19-23]系统总结了平面波和 Gauss 声束入射下边界附近流体柱和弹性柱的声辐射力,并同时考虑了粒子在轴和偏轴的情况. 2018 年, Mitri^[24]同样计算了平面附近无限长刚性圆柱的声辐射力,并分析了声波入射角度对结果的影响. 2020 年, Qiao 等^[25]又给出了粘性流体中任意角度入射的平面波对边界附近刚性圆柱的声辐射力,并基于此成功预测了粒子运动轨迹. 2021 年, 本文作者计算了 Bessel-Gauss 波对阻抗边界附近弹性球壳的声辐射力,从而模拟血管内的药物输送问题^[26]. 2023 年, Simon 等^[27]给出了平面附近各类球形粒子声辐射力的理论解,并通过有限元算法加以验证.

若入射声波功率恒定,声辐射力是一种大小不随时间变化的稳态力. 然而当入射声波的功率随时间变化时,声辐射力将存在随时间变化的动态分量,即动态声辐射力. 与稳态声辐射力类似,动态声辐射力也源于声传播过程中的非线性效应. 调制声波作用下的动态声辐射力在声辐射力脉冲成像^[28]、剪切波弹性成像^[29]、物质参数反演^[30-31]等领域取得了广泛应用. 在理论研究方面, Mitri 等^[32]最早于 2005 年计算了两束频率相近的平面波入射时无限长固体圆柱周期性变化的动态声辐射力. Silva 等^[33-34]根据动力学方程推导了双频率声波对任意三维粒子的动态声辐射力表达式,并对稳态和动态声辐射力进行了实验观测. Mitri^[35]系统总结了平面驻波场中球和圆柱的动态声辐射力,并给出刚性、流体、弹性和气泡四种情况下的结果. 随后,他又将该理论拓展到壳层结构,给出了调制声场作用下弹性圆柱壳和球壳的动态声辐射力,分析了壳层粘滞效应的影响^[36-37]. 2006 年, Silva 等^[38-39]首次计算了考虑流体非线性的情况下双频率声波产生的动态声辐射力,从理论和实验两方面证实了动态声辐射力的参数放大效应. 2007 年, Silva 等^[40]又将动态声辐射力的研究从传统的双频率声波推广到了多频率声波的情况,并推导了此时刚性球的动态声辐射力. 2010 年, Silva^[41]计算了粘弹性小球受到的动态声辐射力,发现了由于声吸收效应在声辐射力频谱上产生的共振峰. 2011 年, Hoyt^[42]提出可以利用相干声源产生的动态声辐射力激发剪切波干涉模式,从而有利于使用传统的超声成像系统实现剪切波成像. 2021 年, Marston 等^[43-44]研究了镜面反射对正入射声波作用下无限长圆柱静态和动态声辐射力的贡献.

实际的操控对象往往位于特定的边界附近. 例如,在血液中进行药物输送时,携带药物的微粒通常位于血管壁附近,因而需要考虑边界对声操控的影响. 如前所述,关于边界附近的稳态声辐射力已有大量理论结果,但目前尚无边界附近动态声辐射力的有关研究. 为此,本文考虑位于无限大阻抗边界附近的粘弹性球壳的动态声辐射力问题. 为了产生幅度随时间变化的调制声场,入射声场选取为两束频率相近的平面波. 在此基础上,通过大量计算探究边界声压反射系数、球壳与边界距离、球壳厚度与材料等对动态声辐射力的影响. 有必要指出,本文的讨论均认为球壳周围的流体是理想的.

1 理论计算

1.1 理论模型

如图 1 所示,设定声速为 c_0 、密度为 ρ_0 的理想流体中无限大阻抗边界旁的一粘弹性球壳,球壳的外半径与内半径分别为 a 与 b ,其中心与阻抗边界的距离为 d ,内部亦充满理想流体. 以球壳中心为原点 O 建立直角坐标系 (x, y, z) ,其中 $+z$ 方向恰好垂直于阻抗边界. 两列幅度与相位均相同的平面波沿 $+z$ 方向入射到弹性球壳上,其角频率分别为 ω_1 和 ω_2 . 为了方便后面在数学方面进行讨论,再以 O 为原点建立一球坐标系 (r, θ, φ) ,两坐标系间存在变换关系: $x=r\sin\theta\cos\varphi, y=r\sin\theta\sin\varphi, z=r\cos\theta$.

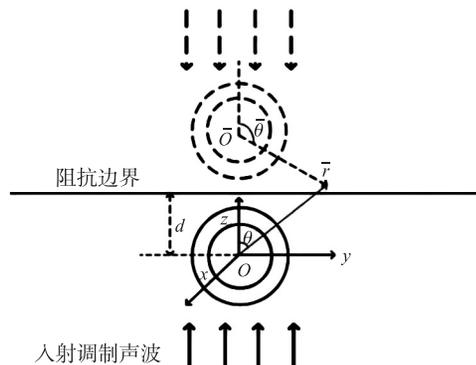


图 1 调制声波入射下阻抗边界附近的粘弹性球壳
Fig. 1 A viscoelastic spherical shell near an impedance boundary placed in an amplitude-modulated beam

1.2 散射系数的求解

在球坐标系中,两列入射平面声波的速度势函数可以表示为球函数的展开形式:

$$\phi_{\text{inc}} = \phi_0 \sum_{p=1}^2 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1) i^n j_n(k_p r) P_n(\cos \theta) e^{-i\omega_p t} \right), \quad (1)$$

式中, ϕ_0 是速度势的振幅, $k_p = \omega_p / c_0$ 是两列声波在流体中的波数, j_n 是 n 阶球贝塞尔函数, P_n 是 n 阶勒让德函数, $p=1, 2$, 分别对应着入射的两列平面波场.

阻抗边界对入射声波的反射波可以表示为:

$$\phi_{\text{ref}} = \phi_0 \sum_{p=1}^2 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} R_s e^{i2k_p d} (2n+1) (-1)^n i^n j_n(k_p r) P_n(\cos \theta) e^{-i\omega_p t} \right), \quad (2)$$

式中, R_s 是阻抗边界的声压反射系数. 当界面完全刚性时, 声压反射系数值为 1.

类似地, 粘弹性球壳和镜像球壳的散射波分别可以表示为:

$$\phi_{\text{sca}} = \phi_0 \sum_{p=1}^2 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1) i^n a_{p,n} h_n^{(1)}(k_p r) P_n(\cos \theta) e^{-i\omega_p t} \right), \quad (3)$$

$$\phi_{\text{sca,ref}} = \phi_0 \sum_{p=1}^2 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} R_s (-1)^n (2n+1) i^n a_{p,n} h_n^{(1)}(k_p \bar{r}) P_n(\cos \bar{\theta}) e^{-i\omega_p t} \right), \quad (4)$$

式中, $h_n^{(1)}$ 是 n 阶第一类球汉克尔函数, $a_{p,n}$ 是两列声波的声散射系数, 由球壳表面的边界条件决定. 综上, 流体中总声场的速度势可以表示为式(1)、(2)、(3)和(4)的叠加.

对于粘弹性球壳中的声场而言, 需要同时考虑纵波与横波的存在. 根据矢量分析的基本理论, 球壳中的质点振速可以表示为标量势函数 ϕ_2 的梯度和矢量势函数 ψ 的旋度之和, 即:

$$U = \nabla \phi_2 + \nabla \times \psi, \quad (5)$$

式中, 每一列声波的标量势与矢量势均满足稳态波动方程:

$$\nabla^2 \phi_{2p} + k_{cp}^2 \phi_{2p} = 0, \quad \nabla^2 \psi_p + k_{sp}^2 \psi_p = 0, \quad (6)$$

式中, ∇^2 表示拉普拉斯算子, $k_{cp} = \omega_p / c_c$ 和 $k_{sp} = \omega_p / c_s$ 分别表示壳层介质中的纵波波数与横波波数, c_c 和 c_s 分别表示纵波波速与横波波速, 其具体大小为:

$$c_c = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad (7)$$

式中, λ 和 μ 是该介质的拉密常数, ρ 是该介质的密度. ϕ_2 和 ψ 均可以写成级数展开形式:

$$\phi_2 = \phi_0 \sum_{p=1}^2 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1) i^n [b_{p,n} j_n(k_{cp} r) + c_{p,n} n_n(k_{cp} r)] P_n(\cos \theta) e^{-i\omega_p t} \right),$$

$$\psi_r = \psi_\theta = 0, \quad (8)$$

$$\psi_\varphi = \phi_0 \sum_{p=1}^2 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1) i^n [d_{p,n} j_n(k_{sp} r) + e_{p,n} n_n(k_{sp} r)] P_n(\cos \theta) e^{-i\omega_p t} \right),$$

式中, n_n 表示 n 阶球诺伊曼函数, $b_{p,n}$ 、 $c_{p,n}$ 、 $d_{p,n}$ 和 $e_{p,n}$ 是由边界条件决定的待定系数.

对于球壳内部流体介质中的声场, 其速度势函数可以表示为:

$$\phi_3 = \phi_0 \sum_{p=1}^2 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1) i^n f_{p,n} j_n(k_{3p} r) P_n(\cos \theta) e^{-i\omega_p t} \right), \quad (9)$$

式中, k_{3p} 是两列声波在球壳内部流体介质中的波数.

对于本文的模型, 应当在球壳内表面 $r=b$ 和外表面 $r=a$ 处同时设置固体-液体边界条件. 具体地:

(1) 流体中的声压与球壳中的法向应力相等; (2) 流体与球壳中的质点法向振速相等; (3) 球壳表面的切向应力为零. 球壳外部的总声场 ϕ_{total} 可以表示为式(1)、(2)、(3)和(4)的总和. 根据球壳表面的边界条件, 理论上可以解得散射系数 $a_{p,n}$. 但有必要指出, 以上的各项速度势函数是在两个坐标系中展开的, 这给运算带来了困难. 为解决这一矛盾, 采用球函数的加法公式将球壳外的总声场统一到坐标系 (r, θ, ϕ) 中:

$$\phi_{\text{total}} = \phi_0 \left\{ \sum_{p=1}^2 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1) i^n j_n(k_p r) P_n(\cos \theta) [1 + R_s (-1)^n e^{i2k_p d}] e^{-i\omega_p t} \right) + \sum_{p=1}^2 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1) i^n a_{p,n} h_n^{(1)}(k_p r) P_n(\cos \theta) e^{-i\omega_p t} \right) + \right.$$

$$\sum_{p=1}^2 \left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} R_s (2m+1) i^m (-1)^m a_{p,m} Q_{mn} j_n(k_p r) P_n(\cos \theta) e^{-i\omega_p t} \right\}, \quad (10)$$

式中, Q_{mn} 的具体表达式可以在文献^[45]中找到. 式(10)可以改写成:

$$\begin{aligned} \phi_{\text{total}} = \phi_0 \left\{ \sum_{p=1}^2 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} A_{p,n} (2n+1) i^n j_n(k_p r) P_n(\cos \theta) e^{-i\omega_p t} \right) + \right. \\ \left. \sum_{p=1}^2 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{p,n} (2n+1) i^n h_n^{(1)}(k_p r) P_n(\cos \theta) e^{-i\omega_p t} \right) \right\}, \quad (11) \end{aligned}$$

式中,

$$A_{p,n} = 1 + R_s e^{i2k_p d} (-1)^n + \frac{R_s}{(2n+1) i^n} \sum_{m=0}^{+\infty} (2m+1) (-1)^m i^m a_{p,m} Q_{mn}. \quad (12)$$

根据速度势函数与声压和质点振速间的关系,可以得到总声压和质点法向振速的表达式:

$$\begin{aligned} p_{\text{total}} = -i\omega\rho_0\phi_0 \left\{ \sum_{p=1}^2 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} A_{p,n} (2n+1) i^n j_n(k_p r) P_n(\cos \theta) e^{-i\omega_p t} \right) + \right. \\ \left. \sum_{p=1}^2 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{p,n} (2n+1) i^n h_n^{(1)}(k_p r) P_n(\cos \theta) e^{-i\omega_p t} \right) \right\}, \quad (13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{r,\text{total}} = \phi_0 \left\{ \sum_{p=1}^2 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} A_{p,n} (2n+1) i^n k_p j_n'(k_p r) P_n(\cos \theta) e^{-i\omega_p t} \right) + \right. \\ \left. \sum_{p=1}^2 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{p,n} (2n+1) i^n k_p h_n^{(1)'}(k_p r) P_n(\cos \theta) e^{-i\omega_p t} \right) \right\}. \quad (14) \end{aligned}$$

至此,可以将各声场表达式代入边界条件中,得到关于各系数的线性方程组,其矩阵形式的方程为:

$$A_p X_p = B_p, \quad (15)$$

式中, $X_p = [a_{p,0}, \dots, a_{p,n}; b_{p,0}, \dots, b_{p,n}; c_{p,0}, \dots, c_{p,n}; d_{p,0}, \dots, d_{p,n}; e_{p,0}, \dots, e_{p,n}; f_{p,0}, \dots, f_{p,n}]^T$. 求解该线性方程组就可以得到散射系数 $a_{p,n}$ 的具体数值.

1.3 声辐射力的计算

在单频稳态声波的作用下,物体受到的声辐射力可以通过对时间平均得到. 对于调制声波作用下的弹性球壳而言,声辐射力会随时间发生变化,但在这一变化比较缓慢的前提下,仍然可以通过对一小段时间内求平均的方式来计算此时的声辐射力,即:

$$\langle F(t) \rangle = \int_{t-T/2}^{t+T/2} F(t) dt, \quad (16)$$

其中, T 必须要满足 $2\pi/(\omega_1 + \omega_2) \leq T \leq 2\pi/(\omega_1 - \omega_2)$ 的约束条件,这里的下限是为了忽略声辐射力本身随声场周期变化的迅变效应,而上限是为了使计算周期内声场的幅度不会出现明显的变化.

由于对称性,此时只需要考虑 z 方向的声辐射力. 调制声波作用下总的声辐射力表示为:

$$\langle F_z \rangle = \langle F_1 \rangle + \langle F_2 \rangle + \langle F_d \rangle, \quad (17)$$

式中, $\langle F_1 \rangle$ 和 $\langle F_2 \rangle$ 是由两列声波分别独立存在时产生的稳态声辐射力, $\langle F_d \rangle$ 是两列声波之间的干涉所引起的动态声辐射力,它随时间呈现周期性的变化. 从式(17)可以看出,粘弹性球壳受到的总声辐射力并非两列声波单独产生的声辐射力的线性叠加.

式(17)中各部分的具体推导过程在文献^[32]中已经详细给出,因此这里不再赘述,仅给出最终的计算结果. 对于稳态声辐射力分量而言,其大小为:

$$\langle F_p \rangle = Y_p S_c \langle E_p \rangle, \quad (18)$$

式中, $S_c = \pi a^2$ 是粘弹性球壳的散射截面积, $\langle E_p \rangle = \rho_0 k_p^2 \phi_0^2 / 2$ 分别是两列声波的空间平均能量密度, Y_p 分别是两列声波的稳态声辐射力函数,在物理上表示单位能量密度的声波在单位面积上所产生的声辐射力大小,其具体表达式为:

$$Y_p = -\frac{4}{x_p^2} \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) (\xi_{p,n+1}^{(1)} \xi_{p,n}^{(2)} + \xi_{p,n}^{(1)} \xi_{p,n+1}^{(2)} + \eta_{p,n+1}^{(1)} \eta_{p,n}^{(2)} + \eta_{p,n}^{(1)} \eta_{p,n+1}^{(2)} + 2\xi_{p,n+1}^{(2)} \xi_{p,n}^{(2)} + 2\eta_{p,n}^{(2)} \eta_{p,n+1}^{(2)}), \quad (19)$$

式中, $x_p = k_p a$, $\xi_{p,n}^{(1)} = \text{Re}[A_{p,n}]$, $\eta_{p,n}^{(1)} = \text{Im}[A_{p,n}]$, $\xi_{p,n}^{(2)} = \text{Re}[a_{p,n}]$, $\eta_{p,n}^{(2)} = \text{Im}[a_{p,n}]$.

式(19)与文献^[17]中的结果完全一致.

动态声辐射力分量的大小为:

$$\langle F_d \rangle = Y_d S_c \langle E_d \rangle \cos(\Delta\omega t - \Phi), \quad (20)$$

式中, $Y_d = \sqrt{\Gamma^2 + \Lambda^2}$ 是动态声辐射力函数, $\langle E_d \rangle = \rho_0 k_1 k_2 \phi_0^2$ 是动态能量密度, $\Delta\omega = |\omega_1 - \omega_2|$ 是两列声波的角频率之差, $\Phi = \tan^{-1}(\Gamma/\Lambda)$ 是相位因子. Γ 和 Λ 的具体表达式分别为:

$$\begin{aligned} \Gamma = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \{ & [j_n(x_2)j_{n+1}(x_1) - j_n(x_1)j_{n+1}(x_2)] (2 + \xi_{2,n+1}^{(1)}\xi_{1,n}^{(2)} + \xi_{2,n}^{(1)}\xi_{1,n+1}^{(2)} + \xi_{1,n+1}^{(1)}\xi_{1,n}^{(2)} + \xi_{1,n}^{(1)}\xi_{2,n+1}^{(2)}) + \\ & [j_n(x_2)n_{n+1}(x_1) - n_n(x_1)j_{n+1}(x_2)] (\xi_{2,n+1}^{(1)}\eta_{1,n}^{(2)} + \xi_{2,n}^{(1)}\eta_{1,n+1}^{(2)}) + [n_n(x_2)j_{n+1}(x_1) - j_n(x_1)n_{n+1}(x_2)] \times \\ & (\xi_{1,n+1}^{(1)}\eta_{2,n}^{(2)} + \xi_{1,n}^{(1)}\eta_{2,n+1}^{(2)}) + [j_n(x_2)j_{n+1}(x_1) - j_n(x_1)j_{n+1}(x_2) + n_n(x_2)n_{n+1}(x_1) - n_n(x_1)n_{n+1}(x_2)] \times \\ & (\xi_{1,n}^{(2)}\xi_{2,n+1}^{(2)} + \xi_{2,n}^{(2)}\xi_{1,n+1}^{(2)} + \eta_{1,n}^{(2)}\eta_{2,n+1}^{(2)} + \eta_{2,n}^{(2)}\eta_{1,n+1}^{(2)}) + [j_n(x_2)n_{n+1}(x_1) - n_n(x_1)j_{n+1}(x_2) + \\ & j_n(x_1)n_{n+1}(x_2) - n_n(x_2)j_{n+1}(x_1)] (\xi_{2,n}^{(2)}\eta_{1,n+1}^{(2)} + \eta_{1,n}^{(2)}\xi_{2,n+1}^{(2)} - \xi_{1,n}^{(2)}\eta_{2,n+1}^{(2)} - \eta_{2,n}^{(2)}\xi_{1,n+1}^{(2)}) \}, \quad (21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Lambda = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \{ & [j_n(x_1)j_{n+1}(x_2) - j_n(x_2)j_{n+1}(x_1)] (\xi_{2,n+1}^{(1)}\eta_{1,n}^{(2)} + \xi_{2,n}^{(1)}\eta_{1,n+1}^{(2)} - \xi_{1,n+1}^{(1)}\eta_{2,n}^{(2)} - \xi_{1,n}^{(1)}\eta_{2,n+1}^{(2)}) + \\ & [j_n(x_2)n_{n+1}(x_1) - n_n(x_1)j_{n+1}(x_2)] (\xi_{2,n+1}^{(1)}\xi_{1,n}^{(2)} + \xi_{2,n}^{(1)}\xi_{1,n+1}^{(2)}) + [j_n(x_1)n_{n+1}(x_2) - n_n(x_2)j_{n+1}(x_1)] \times \\ & (\xi_{1,n+1}^{(1)}\xi_{2,n}^{(2)} + \xi_{1,n}^{(1)}\xi_{2,n+1}^{(2)}) + [j_n(x_2)n_{n+1}(x_1) - n_n(x_1)j_{n+1}(x_2) + j_n(x_1)n_{n+1}(x_2) - n_n(x_2)j_{n+1}(x_1)] \times \\ & (\xi_{1,n}^{(2)}\xi_{2,n+1}^{(2)} + \xi_{2,n}^{(2)}\xi_{1,n+1}^{(2)} + \eta_{1,n}^{(2)}\eta_{2,n+1}^{(2)} + \eta_{2,n}^{(2)}\eta_{1,n+1}^{(2)}) + [j_n(x_2)j_{n+1}(x_1) - j_n(x_1)j_{n+1}(x_2) + \\ & n_n(x_2)n_{n+1}(x_1) - n_n(x_1)n_{n+1}(x_2)] (\xi_{1,n}^{(2)}\eta_{2,n+1}^{(2)} + \eta_{2,n}^{(2)}\xi_{1,n+1}^{(2)} - \eta_{1,n}^{(2)}\xi_{2,n+1}^{(2)} - \xi_{2,n}^{(2)}\eta_{1,n+1}^{(2)}) \}. \quad (22) \end{aligned}$$

不难发现,动态声辐射力随时间呈简谐变化,其变化周期为 $2\pi/\Delta\omega$,即两列声波的频率越相近,动态声辐射力随时间的变化越缓慢.

当两列入射声波的频率相等时显然存在如下关系:

$$x_1 = x_2 = x, \xi_{1,n}^{(1)} = \xi_{2,n}^{(1)} = \xi_n^{(1)}, \xi_{1,n}^{(2)} = \xi_{2,n}^{(2)} = \xi_n^{(2)}, \eta_{1,n}^{(1)} = \eta_{2,n}^{(1)} = \eta_n^{(1)}, \eta_{1,n}^{(2)} = \eta_{2,n}^{(2)} = \eta_n^{(2)}, \quad (23)$$

将式(23)代入式(18)-(22)中,不难得到:

$$Y_1 = Y_2 = \Lambda = -\frac{4}{x^2} \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) (\xi_{n+1}^{(1)}\xi_n^{(2)} + \xi_n^{(1)}\xi_{n+1}^{(2)} + \eta_{n+1}^{(1)}\eta_n^{(2)} + \eta_n^{(1)}\eta_{n+1}^{(2)} + 2\xi_{n+1}^{(2)}\xi_n^{(2)} + 2\eta_n^{(2)}\eta_{n+1}^{(2)}), \quad (24)$$

$$\Gamma = 0, \langle E_1 \rangle = \langle E_2 \rangle = \langle E_d \rangle = \rho_0 k^2 \phi_0^2 / 2, \Delta\omega = \Phi = 0.$$

此时,式(17)可以简化为:

$$\langle F_z \rangle = 4YS_c \langle E \rangle, \quad (25)$$

式中,

$$S_c = \pi a^2, \langle E \rangle = \rho_0 k^2 \phi_0^2 / 2, Y = -\frac{4}{x^2} \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) (\xi_{n+1}^{(1)}\xi_n^{(2)} + \xi_n^{(1)}\xi_{n+1}^{(2)} + \eta_{n+1}^{(1)}\eta_n^{(2)} + \eta_n^{(1)}\eta_{n+1}^{(2)} + 2\xi_{n+1}^{(2)}\xi_n^{(2)} + 2\eta_n^{(2)}\eta_{n+1}^{(2)}). \quad (26)$$

此时声辐射力函数 Y 与式(19)中完全相同,而声辐射力则是式(18)的4倍.事实上,当两列声波的频率严格相等时,入射调制声波则退化为了单频平面波,其振幅是原来每列声波的两倍.考虑到声辐射力是声波的二阶非线性效应,其幅值自然应当是每列声波单独存在时的4倍,并且此时不存在随时间变化的动态声辐射力分量.

值得注意的是,到目前为止我们还没有考虑球壳粘滞吸收的影响.根据文献^[41]中的理论,粘滞吸收可以通过在波数中增加一项虚部来体现.假设粘弹性材料的纵波与横波归一化吸声系数分别是 γ_c 和 γ_s ,则纵波与横波对应的复波数分别可以表示为:

$$\tilde{k}_{cp} = k_{cp}(1 - i\gamma_c), \tilde{k}_{sp} = k_{sp}(1 - i\gamma_s). \quad (27)$$

2 仿真与讨论

根据以上的理论计算,可以对粘弹性球壳的动态声辐射力进行数值仿真.以下所有仿真均针对水中的合成树脂球壳进行计算,球壳内部亦充满水.水的密度为 1000 kg/m^3 ,纵波声速为 1480 m/s ,合成树脂的密度为 1191 kg/m^3 ,纵波与横波声速分别为 2690 m/s 和 1340 m/s ,纵波与横波的归一化吸声系数分别为 0.0035 和 0.0053 .

为了验证上述理论的正确性,图2给出了 $R_s = 0$ 时粘弹性合成树脂球壳的动态声辐射力函数 Y_d 随 x_1

的变化曲线,此时计算结果将退化为自由空间中的情形. 文献^[37]中亦给出了同样条件下动态声辐射力函数曲线计算结果,进一步对比可以发现两者是完全一致的,这在一定程度上可以验证本文计算结果的正确性. 在此基础上,接下来我们将详细分析阻抗边界附近弹性球壳的动态声辐射力特性.

图 3 显示了边界声压反射系数取不同值的情况下,粘弹性合成树脂球壳的动态声辐射力函数 Y_d 随 x_1 和 δx ($|x_1-x_2|$) 的变化,计算范围为 $1 \leq x_1 \leq 10$ 和 $0 \leq \delta x \leq 0.1$,从而使 $\delta x \leq x_1$ 的条件得到很好的满足. 为了便于比较,这里同时给出了边界不存在时的仿真结果,在具体计算中只需令 $R_s=0$ 即可. 球壳的相对厚度为 $b/a=0.5$,球壳与阻抗边界的距离仿真范围选为 $d=2a$. 可以看出,粘弹性合成树脂球壳的动态声辐射力随着 x_1 的变化出现一系列峰值,它们反映了球壳本身的共振模式,其位置仅与球壳相对厚度、球壳材料和内部流体的性质有关. 总体来看,动态声辐射力随着 R_s 的增大而增加,但声辐射力的峰值位置却并不随 R_s 的改变而改变. 从图中还

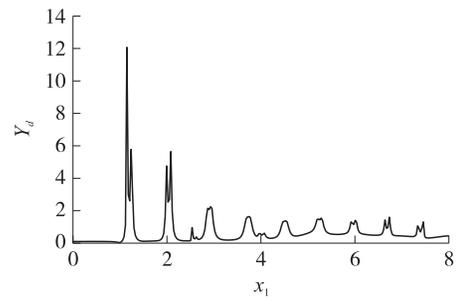


图 2 自由空间中粘弹性合成树脂球壳的动态声辐射力函数 Y_d 随 x_1 的变化(其中 $b/a=0.5, \delta x=0.1$)

Fig. 2 Dynamic acoustic radiation force function Y_d versus x_1 for a viscoelastic lucite spherical shell in free space (with $b/a=0.5, \delta x=0.1$)

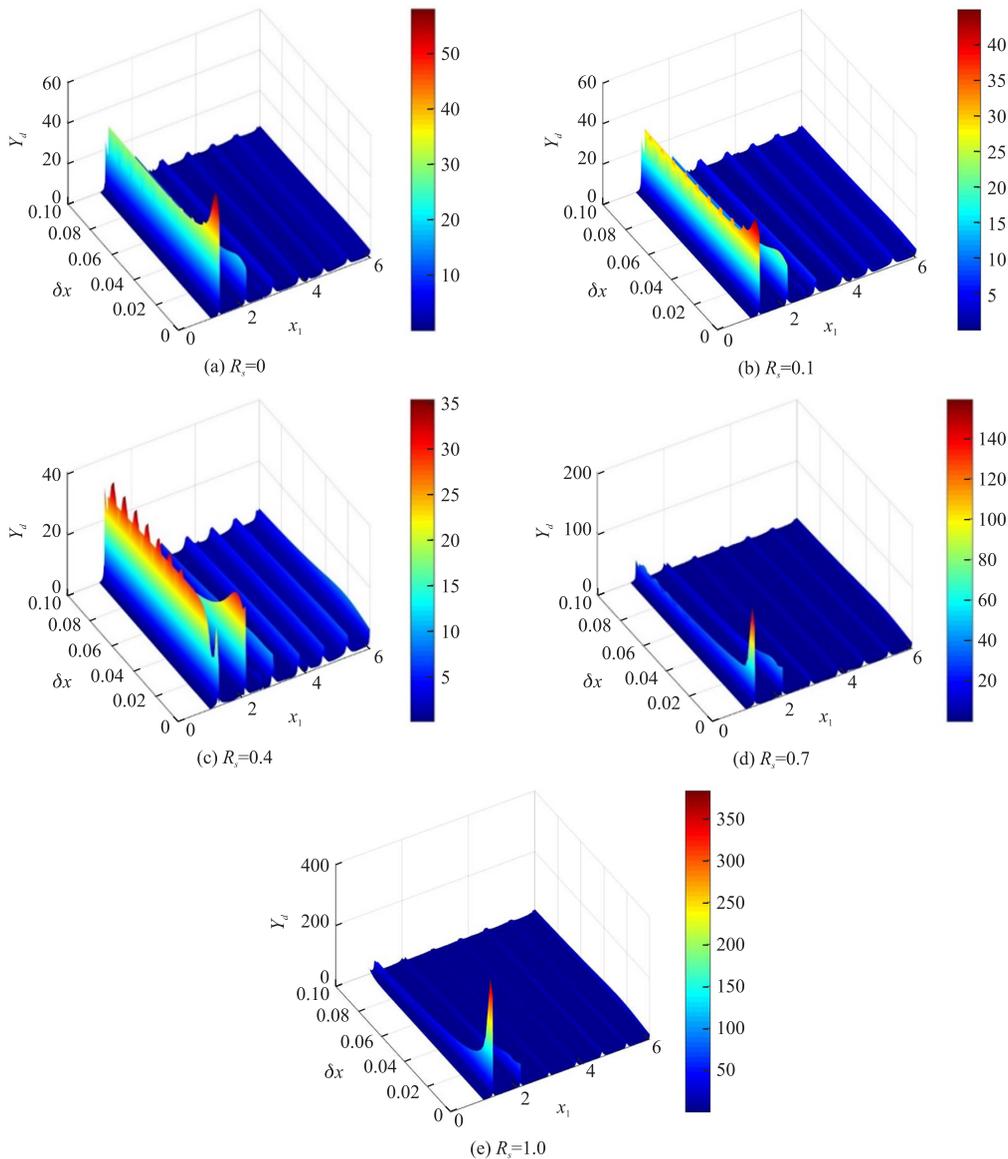


图 3 不同声压反射系数下粘弹性合成树脂球壳的动态声辐射力函数 Y_d 随 x_1 和 δx 的变化(其中 $b/a=0.5, d=2a$)

Fig. 3 Dynamic acoustic radiation force function Y_d versus x_1 and δx for a viscoelastic lucite spherical shell under different reflecting coefficients (with $b/a=0.5, d=2a$)

可以发现, δx 的改变对动态声辐射力的影响主要体现在两点. 一方面, 当 δx 的大小变化时, 动态声辐射力特定峰值的高度会随之改变, 这一现象在 $x_1 = 1$ 附近的峰值处尤为明显, 但这些峰值所对应的频率保持不变. 另一方面, 随着 δx 的增大, 动态声辐射力的峰值会劈裂成两个相邻的峰, 并且两个相邻峰值间的距离会随着 δx 的增大而增大, 从而使这种劈裂现象更加明显. 该现象可作如下解释: 不妨设 x_1 稍小于 x_2 , 对于每对劈裂后的峰而言, 其左边的峰对应着的 x_2 恰好等于无量纲共振频率而 x_1 略小于无量纲共振频率, 其右边的峰对应着的 x_1 恰好等于无量纲共振频率而 x_2 略大于无量纲共振频率. 因此, 对于调制声波入射下的粘弹性球壳而言, 用式 (21) 和 (22) 定义动态声辐射力函数代替式 (19) 定义的稳态声辐射力函数是很有必要的. 尽管如此, 当两频率十分接近时 ($\delta x \approx 0$), 动态声辐射力仍可近似为单频声波作用下的稳态声辐射力.

为了进一步理解动态声辐射力峰值的劈裂现象, 选取 $2.4 \leq x_1 \leq 2.8$ 范围内的共振峰进行深入研究. 在不同声压反射系数下绘制出 $\delta x = 0, 0.01, 0.04, 0.07$ 和 0.1 时的动态声辐射力函数 Y_d 随 x_1 变化的变化曲线, 其余参数均与图 3 中完全相同, 结果如图 4 所示. 可以看出, 当 $\delta x \neq 0$ 时动态声辐射力函数在 $x_1 = 2.65$ 附近的极大值分裂成了两个相邻的较小的峰. 随着 R_s 的增大, 分裂后的峰高度会降低, 并且两峰间的距离恰好等于 δx . 因此, 只有当 δx 超过曲线的共振峰宽度时, 这样的劈裂现象才较为明显. 根据前面的讨论, 分裂后的两个峰值分别对应着两个频率分量恰好等于共振频率的情形, 因而两峰距离自然等于无量纲频率之差. 这些结论与文献^[37]中的结果完全吻合.

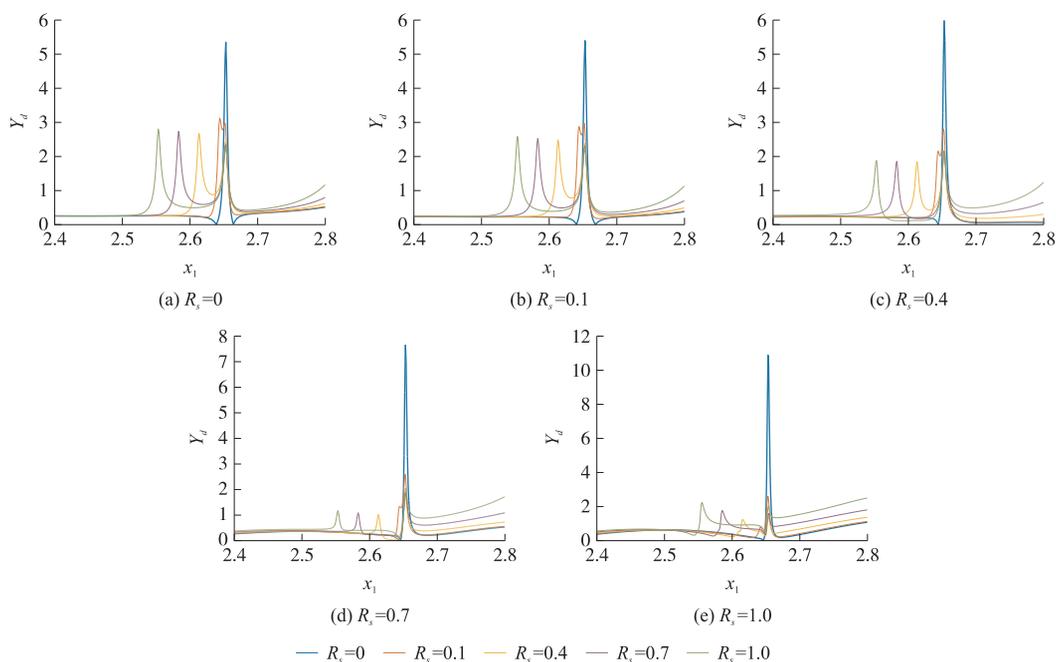


图 4 不同声压反射系数下粘弹性合成树脂球壳的动态声辐射力函数 Y_d 随 x_1 的变化曲线 (其中 $b/a=0.5, d=2a$)

Fig. 4 Dynamic acoustic radiation force function Y_d plots versus x_1 for a viscoelastic lucite spherical shell under different reflecting coefficients (with $b/a=0.5, d=2a$)

在实际声操控中, 粘弹性球壳的相对厚度往往并非固定的. 图 5 给出了不同内外径之比的粘弹性合成树脂球壳的动态声辐射力函数 Y_d 随 x_1 和 δx 的变化曲线. 在计算中, 阻抗边界的声压反射系数 $R_s = 0.2$, 这一数值与实际中硬化的血管壁相符, 从而可以很好地模拟对血管中微泡造影剂的声操控. 结果显示, 球壳厚度的改变会影响球壳的本征振动模式, 进而改变动态声辐射力函数曲线峰值的位置. 随着 b/a 的增大, 曲线的峰值会向中高频方向移动, 反映了薄球壳的共振频率高于厚球壳. 这一现象与文献^[14]中关于稳态声辐射力的结果是一致的. 有必要指出, 在实际的声操控中高频声波会在血液产生明显的衰减, 因此为了产生较强的声辐射力, 球壳的厚度不宜过薄, 从而可使共振峰落在低频区域内.

在以上所有计算中, 粘弹性球壳与边界的距离均固定为半径的两倍. 事实上, 在受到轴向声辐射力的作用时, 球壳会沿 z 轴方向发生位移, 从而改变其与边界的距离, 因此有必要进一步分析球壳中心与边界距离对动态声辐射力的影响.

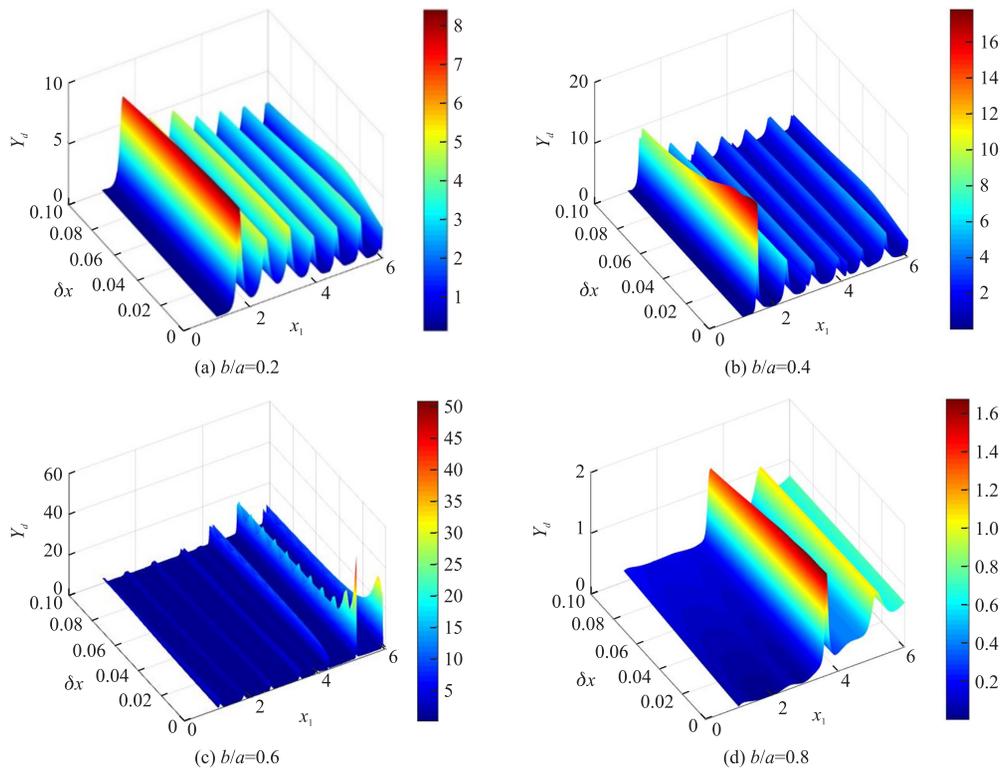


图 5 不同厚度的粘弹性合成树脂球壳的动态声辐射力函数 Y_d 随 x_1 和 δx 的变化(其中 $R_s=0.2, d=2a$)

Fig. 5 Dynamic acoustic radiation force function Y_d versus x_1 and δx for viscoelastic lucite spherical shells with different relative thicknesses (with $R_s=0.2, d=2a$)

图 6 显示了在不同的边界声压反射系数下的动态声辐射力函数 Y_d 随 d/a 的变化曲线,并同时给出了 $\delta x=0.01, 0.04, 0.07$ 和 0.1 时的计算结果,其中 $x_1=2, b/a=0.5$. 可以看出,随着球壳不断远离界面,动态声辐射力呈现周期性振荡的规律. 当边界声压反射系数增大时,动态声辐射力的峰值也随之增大,但曲线振荡的周期并不发生改变. 值得注意的是,动态声辐射力函数曲线并没有出现严格的周期变化,其峰值会随

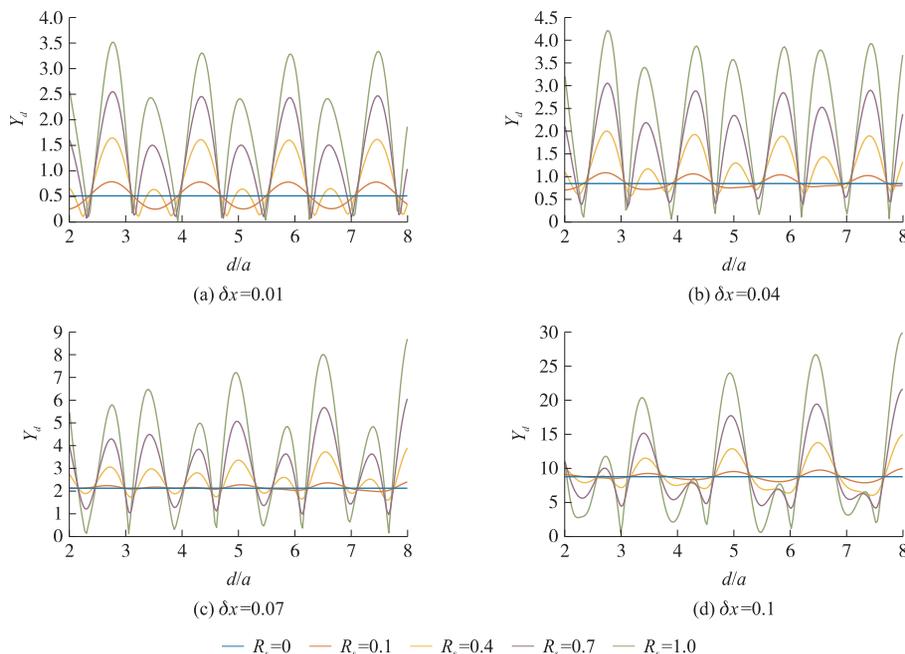


图 6 不同声压反射系数下粘弹性合成树脂球壳的动态声辐射力函数 Y_d 随 d/a 的变化曲线(其中 $x_1=2, b/a=0.5$)

Fig. 6 Dynamic acoustic radiation force function Y_d versus d/a for a viscoelastic lucite spherical shell under different reflecting coefficients (with $x_1=2, b/a=0.5$)

着 d/a 的改变而改变,这一现象与稳态声辐射力的结果很不相同.事实上,阻抗边界的引入会形成驻波.当球壳中心位于驻波场的波腹或波节时,声辐射力达到极小值;而当球壳位于中间位置时,声辐射力达到极大值.基于此,不难得出声辐射力的变化周期恰好为半波长.当 $ka=2$ 时,曲线变化的周期应为 $\pi/2$,这与仿真结果也是相符的.由于调制声波存在两个不同的频率分量,因而不存在严格的波腹和波节位置,动态声辐射力自然也不会严格按周期变化.

最后,尝试研究粘弹性球壳腔内的流体介质对动态声辐射力的影响.图7显示了球壳内部充满空气时的动态声辐射力函数示意图,其余所有参数均与图5相同.对比图5与图7不难发现,当球壳内外半径之比为0.2和0.4时,充气球壳和充水球壳的动态声辐射力几乎完全相同;当球壳内外半径之比为0.6和0.8时,两者的计算结果出现了明显的差异.换言之,腔内流体介质对薄球壳动态声辐射力的影响大于厚球壳.从物理上分析,当球壳相对较厚时,声波大部分在粘弹性壳层中损耗,进入腔内的声能量十分有限,因而腔内介质对动态声辐射力的影响不大.进一步观察图7(c)和(d)可以发现,当球壳内部充满空气时,低频范围内的动态声辐射力明显增强,甚至出现尖锐的峰值.这是由于空气-合成树脂界面的声阻抗差异远大于水-合成树脂界面,声波在这一界面的反射大大增强,从而增加了动态声辐射力大小,这与文献^[37]中的结论相符.该现象可以为低频范围内操控薄球壳提供一定理论指导.

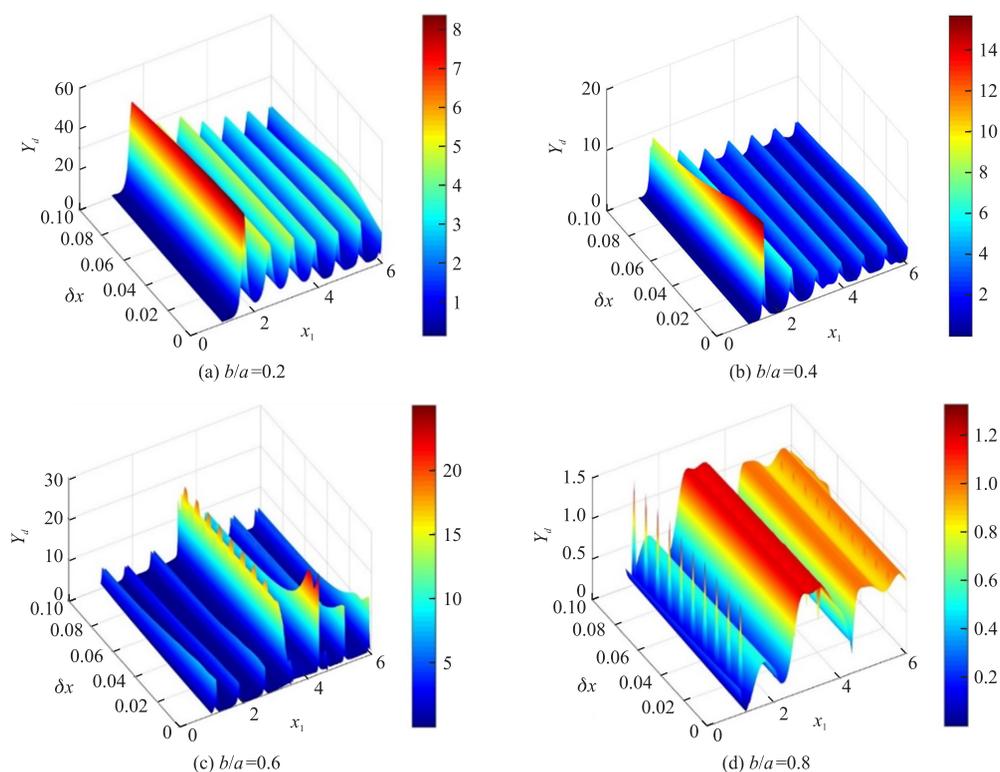


图7 不同厚度的充气粘弹性合成树脂球壳的动态声辐射力函数 Y_d 随 x_1 和 δx 的变化(其中 $R_s=0.2, d=2a$)

Fig. 7 Dynamic acoustic radiation force function Y_d versus x_1 and δx for air-filled viscoelastic lucite spherical shells with different relative thicknesses (with $R_s=0.2, d=2a$)

3 结论

本文从声散射理论出发,根据镜像原理推导了阻抗边界附近粘弹性球壳在幅度调制声波的作用下受到的声辐射力表达式.此时的声辐射力不仅含有稳态分量,还包含随时间变化的动态分量.在此基础上,对充水合成树脂球壳的归一化动态声辐射力函数进行了一系列计算.结果显示,边界声压反射系数的增加会提高动态声辐射力的峰值,但不改变峰值的具体位置.与稳态声辐射力相比,动态声辐射力会出现峰值的劈裂现象,且劈裂后两个相邻峰间的距离恰好等于 δx .由于本征模式的变化,薄球壳的动态声辐射力峰值会向中高频方向移动.随着粘弹性球壳与边界距离发生改变,动态声辐射力呈现近似周期变化.当腔内的流体换成空气时,薄球壳在低频范围内的动态声辐射力明显增强并出现尖锐的峰值.本文结果可以为界面附近特别是血管壁附近的声操控提供一定理论指导.

[参考文献]

- [1] WU J R. Acoustic tweezers[J]. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1991, 89(5):2140-2143.
- [2] 蔡飞燕,孟龙,李飞,等. 声操控微粒研究进展[J]. *应用声学*, 2018, 37(5):655-663.
- [3] 朱纪霖,高东宝,曾新吾. 基于相位变换声镊的单个微粒平面移动操控[J]. *物理学报*, 2021, 70(21):166-174.
- [4] DAYTON P A, MORGAN K E, KLIBANOV A L, et al. A preliminary evaluation of the effects of primary and secondary radiation forces on acoustic contrast agents[J]. *IEEE trans UFFC*, 1997, 44(6):1264-1277.
- [5] DAYTON P A, ALLEN J S, FERRARA K W. The magnitude of radiation force on ultrasound contrast agents[J]. *Journal of the Acoustical Society of America*, 2002, 112(5):2183-2192.
- [6] 章康宁,王佳伟,马青玉. 双频激励超声造影剂微气泡差频特性的理论和实验研究[J]. *南京师大学报(自然科学版)*, 2015, 38(2):30-37.
- [7] LIERKE E G. Acoustic levitation;a comprehensive survey of principles and applications[J]. *Acustica*, 1996, 82(2):220-237.
- [8] 冯乙婷,姬晓亮,张永建,等. Ouzo 液滴的声悬浮动力学研究[J]. *中国科学:物理学 力学 天文学*, 2021, 51(5):151-160.
- [9] KING L V. The acoustic radiation pressure on sphere[J]. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*, 1934, 147:212-240.
- [10] YOSIOKA K, KAWASIMA Y. Acoustic radiation pressure on a compressible sphere[J]. *Acta Acustica Society of America*, 1955, 5:167-173.
- [11] HASEGAWA T, YOSIOKA K. Acoustic radiation force on a solid elastic sphere[J]. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1969, 46(5B):1139-1143.
- [12] HASEGAWA T. Acoustic radiation force on a sphere in a quasi-stationary wave field theory[J]. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1979, 65(1):32-40.
- [13] WU J R, DU G H. Acoustic radiation force on a small compressible sphere in a focused beam[J]. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1990, 87(3):997-1003.
- [14] HASEGAWA T, HINO Y, ANNOU A, et al. Acoustic radiation pressure acting on spherical and cylindrical shells[J]. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1993, 93(1):154-161.
- [15] MITRI F G. Acoustic radiation force acting on elastic and viscoelastic spherical shells placed in a plane standing wave field[J]. *Ultrasonics*, 2005, 43(8):681-691.
- [16] MITRI F G. Calculation of the acoustic radiation force on coated spherical shells in progressive and standing plane waves[J]. *Ultrasonics*, 2006, 44(3):244-258.
- [17] MIRI A K, MITRI F G. Acoustic radiation force on a spherical contrast agent shell near a vessel porous wall-theory[J]. *Ultrasound in medicine and biology*, 2011, 37(2):301-311.
- [18] WANG J, DUAL J. Theoretical and numerical calculation of the acoustic radiation force acting on a circular rigid cylinder near a flat wall in a standing wave excitation in an ideal fluid[J]. *Ultrasonics*, 2012, 52(2):325-332.
- [19] 乔玉配,张小凤. 阻抗界面附近水下刚性柱形粒子的声辐射力[J]. *南京大学学报(自然科学版)*, 2017, 53(1):19-26.
- [20] QIAO Y P, ZHANG X F, ZHANG G B. Acoustic radiation force on a fluid cylindrical particle immersed in water near an impedance boundary[J]. *Journal of the Acoustical Society of America*, 2017, 141(6):4633-4641.
- [21] QIAO Y P, ZHANG X F, ZHANG G B. Axial acoustic radiation force on a rigid cylinder near an impedance boundary for on-axis Gaussian beam[J]. *Wave motion*, 2017, 74:182-190.
- [22] QIAO Y P, SHI J Y, ZHANG X F, et al. Acoustic radiation force on a rigid cylinder in an off-axis Gaussian beam near an impedance boundary[J]. *Wave motion*, 2018, 83:111-120.
- [23] QIAO Y P, WANG H B, LIU X Z, et al. Acoustic radiation force on an elastic cylinder in a Gaussian beam near an impedance boundary[J]. *Wave motion*, 2020, 93:102478.
- [24] MITRI F G. Induced acoustic radiation force and torque on a pulsating cylindrical source near a planar rigid half-space boundary[J]. *Journal of applied physics*, 2018, 124(5):054902.
- [25] QIAO Y P, ZHANG X W, GONG M Y, et al. Acoustic radiation force and motion of a free cylinder in a viscous fluid with a boundary defined by a plane wave incident at an arbitrary angle[J]. *Journal of applied physics*, 2020, 128(4):044902.
- [26] ZANG Y C, LIN W J, SU C, et al. Axial acoustic radiation force on an elastic spherical shell near an impedance boundary for

- zero-order quasi-Bessel-Gauss beam[J]. Chinese physics B,2021,30(4):044301.
- [27] SIMON B E, HAMILTON M F. Analytical solution for acoustic radiation force on a sphere near a planar boundary[J]. Journal of the Acoustical Society of America,2023,153(1):627–642.
- [28] NIGHTINGALE K, SOO M S, NIGHTINGALE R, et al. Acoustic radiation force impulse imaging; in vivo demonstration of clinical feasibility[J]. Ultrasound in medicine and biology,2002,28(2):227–235.
- [29] SARVAZYAN A P, RUDENKO O V, SWANSON S D, et al. Shear wave elasticity imaging: a new ultrasonic technology of medical diagnostics[J]. Ultrasound in medicine and biology,1998,24(9):1419–1435.
- [30] CHEN S, FATEMI M, GREENLEAF J F. Remote measurement of material properties from radiation force induced vibration of an embedded sphere[J]. Journal of the Acoustical Society of America,2002,112(3):884–889.
- [31] MITRI F G. Inverse determination of porosity from object's resonances[J]. Journal of applied physics,2004,96(10):5866–5869.
- [32] MITRI F G, CHEN S G. Theory of dynamic acoustic radiation force experienced by solid cylinders[J]. Physical review E, 2005,71(1):016306.
- [33] SILVA G T, CHEN S G, GREENLEAF J F, et al. Dynamic ultrasound radiation force in fluids[J]. Physical review E,2005,71(5):056617.
- [34] CHEN S G, SILVA G T. Measurement of dynamic and static radiation force on a sphere[J]. Physical review E,2005,71(5):056618.
- [35] MITRI F G. Theoretical calculation of the modulated acoustic radiation force on spheres and cylinders in a standing plane wave-field[J]. Physica D—Nonlinear phenomena,2005,212(1/2):66–81.
- [36] MITRI F G, FATEMI M. Dynamic acoustic radiation force acting on cylindrical shells; theory and simulations[J]. Ultrasonics, 2005,43(6):435–445.
- [37] MITRI F G, FELLAH Z E A. Amplitude-modulated acoustic radiation force experienced by elastic and viscoelastic spherical shells in progressive waves[J]. Ultrasonics,2006,44(3):287–296.
- [38] SILVA G T. Dynamic radiation force of acoustic waves on solid elastic spheres[J]. Physical review E,2006,74(2):026609.
- [39] SILVA G T, CHEN S G, VIANA L P. Parametric amplification of the dynamic radiation force of acoustic waves in fluids[J]. Physical review letters,2006,96(23):234301.
- [40] SILVA G T, URBAN M W, FATEMI M. Multifrequency radiation force of acoustic waves in fluids[J]. Physica D—Nonlinear phenomena,2007,232(1):48–53.
- [41] SILVA G T. Dynamic radiation force of acoustic waves on absorbing spheres[J]. Brazilian journal of physics,2010,40(2):184–187.
- [42] HOYT K. Theoretical analysis of shear wave interference patterns by means of dynamic acoustic radiation forces[J]. International journal of multiphysics,2011,5(24):9–24.
- [43] MARSTON P L, DANIEL T D, FORTUNER A R, et al. Specular-reflection contributions to static and dynamic radiation forces on circular cylinders[J]. Journal of the Acoustical Society of America,2021,149(5):3042–3051.
- [44] MARSTON P L, DANIEL T D, FORTUNER A R. Specular reflection contributions to dynamic radiation forces on highly reflecting spheres(L)[J]. Journal of the Acoustical Society of America,2021,150(1):25–28.
- [45] HUANG H, GAUNAURD G C. Scattering of a plane acoustic wave by a spherical elastic shell near a free surface[J]. International journal of solids structures,1997,34(5):591–602.

[责任编辑:杜忆忱]